

Tema 1

POLARIZACIÓN

Introducción

Las interferencias ocurren cuando la diferencia de fase o de camino óptico entre las dos ondas se mantiene constante.

Las ondas las podemos caracterizar por varias magnitudes:

La irradiancia (que podemos medir con los detectores), la amplitud, la longitud de onda y en último término mediante la fase.

También podemos hablar del frente de ondas, ya que la fase nos proporciona información de la forma del frente de ondas. Los rayos se propagan siempre perpendiculares al frente de ondas.

El frente de ondas nos proporciona información de la forma del objeto, del relieve.

La polarización ocurre cuando los vectores eléctricos E de ambas ondas son perpendiculares y la diferencia de fase entre ambas se mantiene constante en el tiempo.

La proyección de la trayectoria del vector campo eléctrico sobre un plano es una curva cerrada, teniendo en el caso general forma de elipse y en casos particulares forma lineal o circular.

En el espacio esa curva cerrada es una hélice ya que la onda también viaja a lo largo de su trayectoria de propagación.

La curva de polarización se caracteriza o depende de:

E_{ox} , E_{oy} y ϕ según la expresión

En cuanto a la irradiancia:

La irradiancia de un estado de polarización es siempre constante ya que únicamente depende (proporcionalmente) de la suma de las componentes E_{ox} y E_{oy} , y éstas se mantienen constantes en el tiempo.

Por tanto, para determinar un estado de polarización únicamente debemos conocer E_{ox} , E_{oy} y ϕ .

El resultado de la superposición de dos ondas con sus vectores eléctricos ortogonales produce una elipse de polarización que puede, o no, estar centrada en los ejes coordenados.

El valor de la irradiancia es independiente de que la elipse esté centrada o no.

Otros parámetros interesantes son:

Ángulo K : es el ángulo que forma la diagonal de la caja en la que está insertada la elipse.

Ángulo α : es el ángulo que forma los ejes coordenados con los ejes de la elipse.

El ángulo α solamente es igual al ángulo β cuando tenemos luz linealmente polarizada en el resto de casos siempre son distintos.

Ángulo Beta: proporciona la elipticidad

Buscamos la transformación que nos lleve de la fórmula de la elipse no centrada a la de la elipse centrada, esto se consigue con un giro del ángulo α .

Aplicamos entonces la matriz de rotación:

Obteniendo el siguiente resultado:

Cuando no aparece término cruzado, la elipse está centrada, y de la igualación a cero obtenemos:

Un estado de polarización aparece con la superposición de 2 ondas con sus vectores eléctricos ortogonales, tiene irradiancia constante independiente del sistema de representación. Además cualquier estado de polarización se puede definir a partir de los parámetros E_{ox} , E_{oy} y δ .

Casos particulares

- $E_{ox} = E_{oy}$

$$\cos \delta = 0$$

Utilizamos las dos expresiones que conocemos:

Por tanto la elipse resultante está orientada a $\pm 45^\circ$

- $E_{ox} = E_{oy}$

$$\cos \delta = 0$$

El resultado es luz polarizada circular y el sentido del giro depende de:

$0 < \delta < \pi/2$! luz en general que gira a derechas

$\delta > \pi/2$! luz en general que gira a izquierdas

Si $\delta = \pi/2$! R=luz circular dextrógira

Si $\delta = -\pi/2$! L=luz circular levógira

- Si $\delta = k\pi$

$$\cos \delta = \pm 1; \sin \delta = 0$$

Esto se puede expresar como una resta/suma de cuadrados:

Para $\delta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi, \dots$

Aquí se ve la equivalencia con la ecuación de la recta que pasa por el origen, donde la pendiente es la tangente de δ o de β . Sobre un dibujo tendríamos:

Para $n = 3, 5, 7 \dots$ tenemos en cuenta el signo (+) de la ecuación anterior, obteniendo la misma ecuación pero de signo contrario, es decir con pendiente negativa.

- $E_{ox} = E_{oy}$

$$\cos \theta = 0 ; \theta = \pm \pi/2 ; \sin^2 \theta = 1$$

Podemos sustituir en la ecuación general

¿Cómo podemos representar la luz natural?

En la luz natural la diferencia de fase en función del tiempo y el promedio de las amplitudes de E_{ox} y el promedio de las amplitudes de E_{oy} son iguales, por lo tanto en la luz natural todos los estados de polarización son posibles en el tiempo.

La luz natural está constituida por dos ondas con sus vectores eléctricos ortogonales que en media tendrán el mismo valor y que la diferencia de fase entre ellos varía en función del tiempo.

El grado de polarización de una luz determinada viene dado por la expresión:

Donde I_P , I_N son las amplitudes de las componentes polarizada y natural de la luz.

Descripción matricial

Siempre hemos partido de las siguientes expresiones:

Aunque también las podemos escribir de forma compleja:

Si las escribimos en forma de vectores tenemos la siguiente expresión:

Como se puede apreciar, tenemos el mismo producto en las dos expresiones:

Comprobando además que no interviene para nada en la diferencia de fase, por lo tanto no lo tendremos en cuenta para calcular ni el estado de polarización ni la irradiancia.

Podemos simplificar entonces la expresión a lo siguiente:

Si ahora quisieramos calcular la irradiancia y lo hacemos utilizando la expresión compleja original de arriba, tendríamos:

Sacando factor común tendríamos:

vectores y matrices de Jones

Como vemos solo necesitamos la expresión sencilla que citábamos anteriormente:

Por tanto, si queremos conocer el estado de polarización de una determinada luz solo necesitamos conocer:

Si además queremos conocer la irradiancia, necesitaremos conocer también el valor de E_{ox} .

Podemos escribir la ecuación anterior haciendo algunas sustituciones:

Ejemplo:

$\delta = 0$, : Luz linealmente polarizada; E_{ox} , E_{oy} :

si $\delta = 0$; $e_j = 1$, por tanto su vector de Jones será:

Como estamos hablando de luz linealmente polarizada, sabemos que el ángulo θ es igual al ángulo ϕ , por tanto, si conocemos θ tendremos el correspondiente Vector de Jones.

Para otros casos generales, por ejemplo si nos dicen:

Vamos a ver casos que tienen especial interés:

Por tanto, en cualquier luz polarizada plana $\delta = 0$, o π , independientemente de θ .

¿Qué pasa con las luces polarizadas circulares?

En una luz circular se han de cumplir ciertos requisitos:

$$E_{ox} = E_{oy}$$

$$\delta = \pm \pi/2$$

Para el caso de una luz circular a derechas:

Para una luz polarizada circular a izquierdas:

Si tuviéramos una luz polarizada elíptica centrada a derechas, cuya componente x fuese el doble que la componente y, tendríamos:

Si tuviéramos una luz polarizada elíptica centrada a izquierdas, cuya componente x fuese el doble que la componente y, tendríamos:

Ahora escogemos un estado P, su expresión vectorial será:

Ahora queremos comprobar la irradiancia de los vectores básicos:

Como dijimos anteriormente, si queremos conocer además del estado de polarización, la irradiancia tenemos que recurrir a la siguiente expresión, donde aparece el término E_{ox} :

¿Cuál será la expresión de diferentes estados de polarización si queremos que todos esos estados de polarización tengan la misma irradiancia (polarización lineal)?.

Que pasa con los siguientes vectores:

Realmente esas expresiones de E_{ox} y de E_{oy} representan al siguiente vector de polarización:

Entonces, queremos encontrar un vector que represente un estado P45 tal que al compararlo con los vectores P0, P90, tengan la misma irradiancia.

Por tanto el vector que buscamos tiene de componentes:

Si calculamos ahora la irradiancia obtenemos:

Podemos llegar a la misma conclusión pero por otro camino. Nos fijamos en la representación gráfica:

Si calculamos ahora la irradiancia

Si como en nuestro caso $\theta = 45^\circ$, tendríamos la siguiente expresión:

Si tuviéramos una luz cualquiera, por ejemplo P30, su expresión sería:

Por ejemplo, ¿Cómo expresaríamos el siguiente estado de polarización?

Un estado P30 de irradiancia $I = 81$ u.a.

Hasta ahora hemos descrito matricialmente los vectores base P0, P90, P+45 y P-45 y los hemos definido de tal manera que todos tienen de irradiancia la unidad. Pero, ¿qué pasa con los estados de polarización circulares a derechas e izquierdas?. ¿Podemos expresarlos también de la misma forma y que tengan de irradiancia también unidad?.

Recordemos que en un principio habíamos definido, por ejemplo un estado R de la siguiente forma:

Si calculamos la irradiancia mediante la expresión anteriormente utilizada:

Antes describíamos una luz plana como:

De una luz circular a derechas sabemos como expresarla (lo hemos hecho antes) y además sabemos que $E_{ox} = E_{oy}$, y que $\theta = \pi/2$

Pero como acabamos de ver concretamente esa expresión del estado R no tiene irradiancia unidad, vamos a intentar determinar cual es la expresión matricial para un estado R tal que su irradiancia sea la unidad. Para ello recordemos lo que habíamos hecho para hallar el vector de Jones perteneciente a, por ejemplo el estado P+45.

Es importante destacar que ambos E_o no son comparables y que no deben ser confundidos.

Por lo tanto para conocer el vector de un estado cualquiera, partiremos de la expresión general:

Calcularemos la expresión que nos proporciona la irradiancia de un estado cualquiera:

Nuestro objetivo era conseguir el vector con irradiancia unidad, para ello tendremos que buscar un coeficiente que, multiplicado por la expresión general, nos proporcione el vector de irradiancia unidad:

Utilizando esta expresión podemos designar cualquier estado de polarización, así por ejemplo, un estado de polarización con una irradiancia de 107 u.a. de irradiancia, sería:

Así, aplicando esta expresión general a los estados que hemos caracterizado anteriormente tendríamos:

Para un estado P :

Sabemos que:

Ahora comprobaremos los estados circulares

De ellos sabemos que:

Aplicando la expresión general obtenemos:

Si tenemos un estado elíptico cualquiera, también podemos aplicarla, coincidiendo con la expresión original.

Resumiendo, habríamos obtenido las mismas expresiones para la irradiancia por medio de otro sistema más general y sencillo:

Luz plana de $I = 1$	Luz circular de $I = 1$	Luz elíptica de $I = 1$
--	---	---

Por ejemplo para una luz de irradiancia $I = 328408$ u.a.:

Luz plana de $I = 328408$	Luz circular de $I = 328408$	Luz elíptica de $I = 328408$
---	--	--

Por lo tanto estamos en condiciones de poder definir cualquier estado de polarización normalizado a irradiancia unidad:

Estado de polarización	E_{ox}, E_{oy},	Vector de Jones
P₀	E _{ox} = 1 E _{oy} = 0	
P₉₀	E _{ox} = 0 E _{oy} = 1	
P_{±45}	E _{ox} = E _{oy} = = 0,	
R, L	E _{ox} = E _{oy} = =	

Lo que nos proponemos ahora es cambiar el estado de polarización de una luz, como todas ellas hemos visto que las podemos expresar en función de una matriz 2×1 , tendremos que encontrar un elemento matemático que al interaccionar con una matriz 2×1 el resultado sea otra matriz 2×1 . Ese elemento transformado es una matriz 2×2 .

Las matrices que representan matemáticamente a los elementos polarizantes que nos cambian los estados de polarización se llaman matrices de Jones.

Para determinar las matrices de Jones es necesario conocer una base del espacio bidimensional, para ello los vectores que forman esa base han de ser ortogonales, si son ortonormales todavía mejor. Lo que haremos es ver como se transforma la base cuando pasa por el polarizador.

Conocemos la base de los vectores P₀, P₉₀:

Aunque también podríamos utilizar otras bases, por ejemplo P_{±45}:

O bien podemos elegir como base los estados circulares R, L:

Habr  qué elegir la base más adecuada en cada momento, pero el resultado debe ser independiente de la base escogida.

Matriz de un polarizador lineal horizontal

Problemas

 Cu l es la matriz asociada a un polarizador?  C mo se transforman 2 vectores base a través de esa matriz?.

Calcular la matriz de Jones de un polarizador lineal cuyo eje de transmisión forma un ángulo con la horizontal.

Pasaremos a través de este polarizador un conjunto de vectores base y observaremos como se transforman.

Comenzaremos viendo como se transforma el vector P_0 cuando pasa por este polarizador lineal.

Podríamos aplicar la ley de Malus para calcular la irradiancia

Por lo tanto, tras todas las proyecciones llegamos a la conclusión que las componentes cartesianas del vector que pasa a través del polarizador son:

Si quisieramos calcular su irradiancia comprobamos que obtenemos el mismo resultado que aplicando la ley de Malus;

Vamos a ver ahora como se transforma el vector P_{90}

Podríamos aplicar la ley de Malus para calcular la irradiancia

Por lo tanto, tras todas las proyecciones llegamos a la conclusión que las componentes cartesianas del vector que pasa a través del polarizador son:

Si quisieramos calcular su irradiancia comprobamos que obtenemos el mismo resultado que aplicando la ley de Malus;

Con toda esta información ya tenemos tanto las expresiones de los vectores base originales como las expresiones de los vectores base una vez han atravesado el polarizador.

Ahora podremos hallar cuales son los valores de la matriz de Jones de este polarizador, conocidos la expresión inicial y la final de los vectores base; entonces:

Desarrollando estas ecuaciones obtenemos:

Por tanto la matriz de Jones para un polarizador lineal cuyo eje de transmisión forma un ángulo con la horizontal sería:

Vamos a encontrar ahora la matriz del elemento polarizante anterior, es decir polarizador lineal con su eje de transmisión formando un ángulo con la horizontal, pero utilizando los vectores básicos genéricos P y $P + 90$.

Por tanto tenemos los dos elementos indispensables. Por un lado las expresiones de los vectores base antes y después de pasar por el polarizador. También sabemos la estructura que tiene el elemento polarizante (matriz 2×2), por tanto podemos combinarlo todo y descubrir los coeficientes de esa matriz.

Para P y P +90

Por tanto si retomamos expresiones anteriores:

Si continuamos con la 2ª expresión que obtenemos del vector P resulta:

Si reunimos todos los resultados obtenemos los valores de los coeficientes de la matriz de Jones para un polarizador lineal con su eje de transmisión formando un ángulo con la horizontal.

Como se puede observar el resultado es idéntico al hallado anteriormente por el método gráfico.

Podemos aplicar esta expresión a cualquier polarizador lineal, bien a casos particulares o a casos más generales.

Polarizador horizontal ($\theta = 0$)

Polarizador vertical ($\theta = 90$)

Polarizador a 45° ($\theta = +45$)

Polarizador a -45° ($\theta = -45$)

Polarizador a 30° ($\theta = 30$)

Retardadores

Son elementos que solo afectan a la fase, nunca a la intensidad(supuesto un retardador ideal).

Vamos a ver un ejemplo de un retardador:

Lámina de cuarto de onda eje rápido horizontal (LCOERH)

Este retardador introduce un desfase de $\pi/2$ en la componente x, podríamos escribir la ecuación de la onda de la siguiente forma:

Podemos recordar que colocar un desfase de $\pi/2$ en la componente x equivale a colocar un desfase en la componente y de $-\pi/2$.

Por tanto las dos componentes de una luz que pasa por una LCOERH podrían escribirse de la siguiente forma:

¿Como podríamos conseguir un estado L.? Como sabemos un estado L se caracteriza por tener: $E_{ox} = E_{oy}$, $\phi_x - \phi_y = -\pi/2$.

Sabiendo que una LCOERH introduce un desfase de $-\pi/2$, soolamente necesitamos un estado inicial que se caracterice por tener $E_{ox} = E_{oy}$, $\phi_x - \phi_y = 0$ ($0 - \pi/2 = -\pi/2$).

Llegamos a la conclusión que ese estado inicial ha de ser un estado P45. Por tanto tendríamos a la salida un estado L.

¿Como actúa la lámina si introducimos P-45?

Por tanto estamos en disposición de calcular cual es la matriz de Jones para una LCOERH, ya que podemos

utilizar como bases los vectores conocidos P_{45} y P_{-45} y además también conocemos como los transforma la lámina (L y R).

Recordando cuales eran las expresiones de dichos vectores y aplicando la matriz de transformación, tendríamos:

Resolviendo las ecuaciones tendríamos:

Finalmente la matriz de Jones que estamos buscando y que caracteriza a una LCOERH es:

Ejercicio:

¿Cuál sería la matriz de Jones para una LCOERV?, sabiendo que introduce un desfase en la componente y de $= \pi/2$.

Solución:

Otro elemento polarizante que vale la pena estudiar es lo que se llama un polarizador circular homogéneo a derechas PCHD.

Este elemento tiene dos características:

- 1.- Es un elemento transparente a los estados R
- 2.- Es un elemento opaco a los estados L

Intentaremos fabricar un polarizador de este tipo utilizando en principio un polarizador lineal a 45° y una LCOERH, en el montaje siguiente:

Hemos visto que si introducimos luz circular a derechas, sale luz también circular a derechas, pero ¿Qué pasa si metemos luz circular a izquierdas?

Vemos que también sale luz circular a derechas. Vamos a introducir analíticamente una luz cualquiera polarizada elípticamente.

En primer lugar vamos a ver cual es la acción del polarizador a -45°

Recordamos la expresión de una luz elíptica cualquiera:

Y ahora recordamos la expresión del polarizador lineal a -45° :