

TEMA 5: DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

DISTRIBUCION POR MUESTREO

DEFINICIÓN

La distribución de todos los valores posibles que puede asumir un estadístico muestral, calculados a partir de muestras del *mismo tamaño* y extraído en forma *aleatoria* de la misma población, se llama *distribución muestral de ese estadístico*.

La distribución por muestreo de un estadístico muestral es la distribución de probabilidad del mismo, calculado en cada una de las muestras posibles extraídas aleatoriamente de la población.

TIPOS DE DISTRIBUCIONES MUESTRALES

- Distribución de la media ()
- Distribución de la variancia (2)
- Distribución de la proporción ()
- Distribución de la diferencia de medias ()
- Distribución de la diferencia proporciones ()
- Distribución del cociente de variancias ()

CÓMO SE CONSTRUYE EMPÍRICAMENTE UNA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?

- De una población finita de tamaño N , se extraen al azar todas las muestras posibles (K) de igual tamaño n .
- Se calcula el estadístico muestral de interés para cada muestra.
- Se organizan y presentan los valores del estadístico muestral calculados en una tabla de distribución de probabilidad.

DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LA MEDIA

- PARÁMETROS DE LA DISTRIBUCIÓN

Estudio de caso

Supongamos una población compuesta por $N = 5$ escuelas rurales. La variable en estudio y el número de maestros registrados en cada escuela son:

- X = número de maestros por escuela
- $X_1 = 2$ $x_2 = 3$ $x_3 = 6$ $x_4 = 8$ $x_5 = 11$

6 maestros maestros

- Se extraen de la población muestras aleatorias simples con reemplazo, de tamaño $n = 2$, resultando $Nn = 5 \times 2 = 25$, muestras posibles.
- Se calcula para cada muestra extraída, el valor promedio.
 - Muestras posibles y promedios de cada muestra.

Muestras

Observaciones en la muestra (x_i, x_j)

Probabilidad de cada muestra, $f(x_i)$

Media muestral

1

(2, 2)

1/25

2,0

2

(2, 3)

1/25

2,5

3

(2, 6)

1/25

4,0

4

(2, 8)

1/25

5,0

5

(2, 11)

1/25

6,5

6

(3, 2)

1/25

2,5

7

(3, 3)

1/25

3,0

8

(3, 6)

1/25

4,5

9

(3, 8)

1/25

5,5

10

(3, 11)

1/25

7,0

11

(6, 2)

1/25

4,0

12

(6, 3)

1/25

4,5

13

(6, 6)

1/25

6,0

14

(6, 8)

1/25

7,0

15

(6,11)

1/25

8,5

16

(8, 2)

1/25

5,0

17

(8, 3)

1/25

5,5

18

(8, 6)

1/25

7,0

19

(8, 8)

1/25

8,0

20

(8,11)

1/25

9,5

21

(11, 2)

1/25

6,5

22

(11, 3)

1/25

7,0

23

(11, 6)

1/25

8,5

24

(11, 8)

1/25

9,5

25

(11, 11)

1/25

11

• Distribución de probabilidad de la variable aleatoria media muestral.

f_i

$f()$

2,0

1

$1/25$

$2/25$

$16/25$

2,5

2

$2/25$

$5/25$

$24,5/25$

3,0

1

$1/25$

$3/25$

$9/25$

4,0

2

$2/25$

$8/25$

$8/25$

4,5

2

$2/25$

9/25

4,5/25

5,0

2

2/25

10/25

2/25

5,5

2

2/25

11/25

0,5/25

6,0

1

1/25

6/25

0/25

6,5

2

2/25

13/25

0,5/25

7,0

4

4/25

28/25

4/25

8,0

1

1/25

8/25

4/25

8,5

2

2/25

17/25

12,5/25

9,5

2

2/25

19/25

24,5/25

11,0

1

1/25

11/25

25/25

25

1

$150/25 = 6$

$135/25 = 5,4$

- El promedio de las medias muestrales *es igual a la media de la población*.

- La variancia de la variable aleatoria media muestral, es directamente proporcional a la variancia poblacional e inversamente proporcional al tamaño de la muestra.
- El valor que cuantifica la variación de las medias muestrales, para un mismo tamaño de muestra es el *Error Estándar de la media*.

• FORMA DE LA DISTRIBUCION MUESTRAL DE LA MEDIA

1.- Si la población de origen es normal, la distribución de la media muestral es también normal, independiente del tamaño (n) de la muestra extraída con una *media*, $\bar{x}$ y *variancia*, $\frac{s^2}{n}$

2.- Si la población de origen no presenta una distribución normal o si el tamaño de la muestra es grande, por el Teorema Central del Límite se cumple:

Dada una población de cualquier forma funcional no normal con una media μ y variancia finita, σ^2 , la distribución muestral de la media, calculada a partir de muestras de igual tamaño (n) de dicha población, será aproximadamente normal con media, $\bar{x}$ y variancia, $\frac{s^2}{n}$, cuando la muestra es grande

3.-A medida que el tamaño (n) de la muestra aumenta, la distribución muestral de la media se concentra cada vez más alrededor de $\bar{x}$, y la variabilidad de las medias, cuantificadas por el error estándar ($\frac{s}{\sqrt{n}}$), disminuye.

DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LA VARIANCIA

Estudio de caso

Retomando el estudio de la población compuesta por N = 5 escuelas rurales. La variable en estudio y el número de maestros registrados en cada escuela son X = número de maestros por escuela

- $x_1 = 2$ $x_2 = 3$ $x_3 = 6$ $x_4 = 8$ $x_5 = 11$ con (maestros)²

Se extraen de la población muestras aleatorias simples con reemplazo, de tamaño n = 2, resultando $Nn = 5 \times 2 = 10$, muestras posibles. Se calcula para cada muestra extraída, el valor de la variancia S^2 .

- Muestras posibles y Variancias de cada muestra

Muestras

Observaciones en la muestra (xi, xj)

1

(2, 2)

0,00

0,00

2

(2, 3)

0,25

0,50

3

(2, 6)

4,00

8,00

4

(2, 8)

9,00

18,00

5

(2, 11)

20,25

40,50

6

(3, 2)

0,25

0,50

7

(3, 3)

0,00

0,00

8

(3, 6)

2,25

4,50

9

(3, 8)

6,25

12,50

10

(3, 11)

16,00

32,00

11

(6, 2)

4,00

8,00

12

(6, 3)

2,25

4,50

13

(6, 6)

0,00

0,00

14

(6, 8)

1,00

2,00

15

(6,11)

6,25

12,50

16

(8, 2)

9,00

18,00

17

(8, 3)

6,25

12,50

18

(8, 6)

1,00

2,00

19

(8, 8)

0,00

0,00

20

(8,11)

2,25

4,50

21

(11, 2)

20,25

40,50

22

(11, 3)

16,00

32,00

23

(11, 6)

6,25

12,50

24

(11, 8)

2,25

4,50

25

(11, 11)

0,00

0,00

- Valor esperado E de la variancia muestral con denominador n
- Distribución de probabilidad de la variable aleatoria Variancia muestral.

fi

f()

f()fi

0,00

5

5/25

0,00/25

0,25

2

2/25

0,50/25

1,00

2

2/25

2,00/25

2,25

4

4/25

9,00/25

4,00

2

2/25

8,00/25

6,25

4

4/25

25,00/25

9,00

2

2/25

18,00/25

16,00

2

2/25

32,00/25

20,25

2

2/25

40,00/25

25

25/25

135,00/25

· El valor esperado E que resulta del promedio de las K variancias muestrales, cuyo denominador es n , es diferente a la variancia de la población .

Valor esperado E de la variancia muestral corregido por los grados de libertad, denominador $n-1$

• **Distribución de probabilidad de la variable aleatoria variancia muestral**

f_i

$f()$

$f()f_i$

0,00

5

5/25

0,00/25

0,50

2

2/25

1,00/25

2,00

2

2/25

4,00/25

4,50

4

4/25

18,00/25

8,00

2

2/25

16,00/25

12,50

4

4/25

50,00/25

18,00

2

2/25

36,00/25

32,00

2

2/25

64,00/25

40,50

2

2/25

81,00/25

25

25/25

270,00/25

- El valor esperado E que resulta del promedio de las K variancias muestrales , cuyo denominador es $n-1$, es igual a la variancia de la población .

- **FORMA DE LA DISTRIBUCION MUESTRAL DE LA VARIANCIA**

- La distribución de probabilidad de la variancia muestral es asimétrica positiva y se relaciona con la distribución continua chi- cuadrado cuando el tamaño muestral es $n < 30$.
- Cuando $n \rightarrow \infty$ su forma se aproxima a una normal

$X_3 S_3^2$

$X_1 S_1^2$

$X_4 S_4^2$

$X_2 S_2^2$

$X_k S_k^2$

$$E(S_i^2) = \frac{135}{25} = 5,4 \quad \sigma^2 = 10,8$$

•