

### CAPÍTULO III. PIEZAS DE DIRECTRIZ RECTA SOMETIDAS A COMPRESIÓN. PILARES.

#### TEMA 3. LONGITUDES IDEALES DE PANDEO Y MOMENTOS DE INERCIA VIRTUAL.

##### LONGITUD DE PANDEO.

La longitud de pandeo de una pieza sometida a un esfuerzo normal de compresión a la longitud de otra pieza ideal recta prismática biarticulada y cargada en sus extremos tal que tenga la misma carga crítica que la pieza real considerada. La longitud de pandeo viene dada por la expresión ;donde es la longitud real de la pieza y el coeficiente de esbeltez.

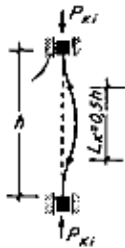
##### PIEZAS DE SECCIÓN CONSTANTE SOMETIDAS A COMPRESIÓN UNIFORME.

Tenemos el caso más general de pieza biarticulada, en este caso; la articulación se puede mover.



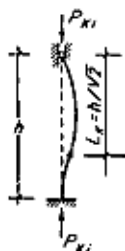
Guarda relación con la deformada de la pieza.

En el caso de pieza biempotrada.



En este caso vemos que ,los se deducen intuitivamente, viendo los puntos de inflexión de la deformada.

Otro caso sería el de la pieza empotrada-articulada.



En este caso

Cuando el caso sea de pieza empotrada-libre.



Aquí tenemos que

Y finalmente, de encontrarnos un caso de pieza biempotrada con desplazamiento.

Finalmente, para este caso,

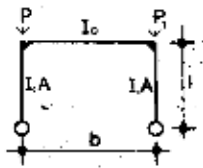
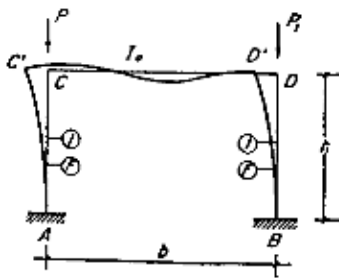
Estos son los casos fundamentales que se presentan en piezas de sección constante; para el efecto de pandeo.

Tenemos también coeficientes en estructuras de barras triangulares y celosías.

(Tabla 3.2.4.2 pág.119. Coeficiente de esbeltez en barras de estructuras triangulares.)

COEFICIENTE EN SOPORTES DE ESTRUCTURAS PORTICADAS DE UNA ALTURA.

Tenemos un pórtico



; estas son magnitudes auxiliares.

Para cualquier tipo de pórtico que nos podamos encontrar; los coeficientes que precisemos los hallaremos en la norma EA-95.

(Tabla 3.2.4.3 págs. 120, 121 y 122. Coeficientes de esbeltez en soportes de estructuras porticadas de una altura.)

COEFICIENTES DE ESBELTEZ EN PILARES DE EDIFICACIÓN EN GENERAL.

En una estructura de edificación constituida por vigas y pilares se toma como longitud  $L$  de un pilar la distancia entre las caras superiores de dos forjados consecutivos o la distancia entre el apoyo de la base en el cimiento y la cara superior del primer forjado.

En el extremo superior o en el inferior de un pilar con unión rígida, en el nudo se define como grado de empotramiento  $K$  del pilar en el plano del pórtico, el valor.

Para el nudo al que pertenece el pilar, según el ejemplo expuesto.

Son el momento de Inercia y longitud del pilar.

Son el momento de Inercia y longitud del pilar superior o inferior al nudo.

Son el momento de Inercia y longitud del pilar izquierdo al nudo.

Son el momento de Inercia y longitud del pilar derecho al nudo.

ARTICULADO.

EMPOTRAMIENTO EN CIMIENTO.

Estudiando el pandeo en un pilar; tenemos que para con los valores de  $y$ , vamos a las siguientes tablas de la EA-95.

(Tabla 3.2.4.4.A pág. 123. Coeficiente de esbeltez para pilares de estructuras con recuadros arriostrados.)

| COEFICIENTE $\beta$ PARA PILARES DE ESTRUCTURAS CON RECUADROS ARRIOSTRADOS |                                                                                  |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Grado de empotramiento en el nudo inferior $k_1$                           | Coeficiente $\beta$ , siendo el grado de empotramiento en el nudo superior $k_2$ |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|                                                                            | 0,0                                                                              | 0,1  | 0,2  | 0,3  | 0,4  | 0,5  | 0,6  | 0,7  | 0,8  | 0,9  | 1,0  |
| 0,0                                                                        | 1,00                                                                             | 0,97 | 0,95 | 0,93 | 0,90 | 0,88 | 0,85 | 0,81 | 0,78 | 0,74 | 0,70 |
| 0,1                                                                        | 0,97                                                                             | 0,95 | 0,93 | 0,91 | 0,88 | 0,86 | 0,83 | 0,80 | 0,76 | 0,72 | 0,69 |
| 0,2                                                                        | 0,95                                                                             | 0,93 | 0,91 | 0,89 | 0,86 | 0,84 | 0,81 | 0,78 | 0,75 | 0,71 | 0,67 |
| 0,3                                                                        | 0,93                                                                             | 0,91 | 0,89 | 0,87 | 0,84 | 0,82 | 0,79 | 0,76 | 0,73 | 0,69 | 0,66 |
| 0,4                                                                        | 0,90                                                                             | 0,88 | 0,86 | 0,84 | 0,82 | 0,80 | 0,77 | 0,74 | 0,71 | 0,67 | 0,64 |
| 0,5                                                                        | 0,88                                                                             | 0,86 | 0,84 | 0,82 | 0,80 | 0,77 | 0,75 | 0,72 | 0,69 | 0,65 | 0,63 |
| 0,6                                                                        | 0,85                                                                             | 0,83 | 0,81 | 0,79 | 0,77 | 0,75 | 0,72 | 0,70 | 0,67 | 0,63 | 0,61 |
| 0,7                                                                        | 0,81                                                                             | 0,80 | 0,78 | 0,76 | 0,74 | 0,72 | 0,70 | 0,67 | 0,64 | 0,61 | 0,58 |
| 0,8                                                                        | 0,78                                                                             | 0,76 | 0,75 | 0,73 | 0,71 | 0,69 | 0,67 | 0,64 | 0,61 | 0,58 | 0,56 |
| 0,9                                                                        | 0,74                                                                             | 0,72 | 0,71 | 0,69 | 0,67 | 0,65 | 0,63 | 0,61 | 0,58 | 0,56 | 0,53 |
| 1,0                                                                        | 0,70                                                                             | 0,69 | 0,67 | 0,66 | 0,64 | 0,63 | 0,61 | 0,58 | 0,56 | 0,53 | 0,50 |

(Tabla 3.2.4.4.B pág.123. Coeficiente de esbeltez para pilares de estructuras sin recuadros arriostrados.)

### COEFICIENTE $\beta$ PARA PILARES DE ESTRUCTURAS SIN RECUADROS ARRIOSTRADOS

| Grado de empotramiento en el nudo inferior $k_1$ | Coeficiente $\beta$ , siendo el grado de empotramiento en el nudo superior $k_2$ |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|                                                  | 0,0                                                                              | 0,1  | 0,2  | 0,3  | 0,4  | 0,5  | 0,6  | 0,7  | 0,8  | 0,9  | 1,0  |
| 0,0                                              | —                                                                                | 4,29 | 3,23 | 2,78 | 2,53 | 2,37 | 2,24 | 2,17 | 2,10 | 2,04 | 2,00 |
| 0,1                                              | 4,29                                                                             | 2,89 | 2,39 | 2,15 | 1,98 | 1,88 | 1,80 | 1,74 | 1,69 | 1,66 | 1,62 |
| 0,2                                              | 3,23                                                                             | 2,39 | 2,05 | 1,85 | 1,78 | 1,64 | 1,58 | 1,53 | 1,49 | 1,46 | 1,43 |
| 0,3                                              | 2,78                                                                             | 2,15 | 1,85 | 1,69 | 1,56 | 1,52 | 1,44 | 1,40 | 1,36 | 1,33 | 1,31 |
| 0,4                                              | 2,53                                                                             | 1,98 | 1,73 | 1,56 | 1,48 | 1,41 | 1,35 | 1,31 | 1,28 | 1,24 | 1,22 |
| 0,5                                              | 2,37                                                                             | 1,88 | 1,64 | 1,52 | 1,41 | 1,34 | 1,29 | 1,24 | 1,21 | 1,18 | 1,16 |
| 0,6                                              | 2,24                                                                             | 1,80 | 1,58 | 1,44 | 1,35 | 1,29 | 1,24 | 1,20 | 1,16 | 1,14 | 1,11 |
| 0,7                                              | 2,17                                                                             | 1,74 | 1,53 | 1,40 | 1,31 | 1,24 | 1,20 | 1,16 | 1,12 | 1,10 | 1,08 |
| 0,8                                              | 2,10                                                                             | 1,69 | 1,49 | 1,36 | 1,28 | 1,21 | 1,16 | 1,12 | 1,09 | 1,07 | 1,05 |
| 0,9                                              | 2,04                                                                             | 1,66 | 1,46 | 1,33 | 1,24 | 1,18 | 1,14 | 1,10 | 1,07 | 1,04 | 1,02 |
| 1,0                                              | 2,00                                                                             | 1,62 | 1,43 | 1,31 | 1,22 | 1,16 | 1,11 | 1,08 | 1,05 | 1,02 | 1,00 |

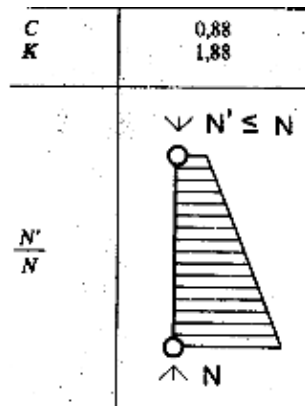
Llamaremos al nudo inferior y al nudo superior.

### COEFICIENTE EN PIEZAS DE SECCIÓN CONSTANTE SOMETIDAS A COMPRESIÓN VARIABLE.

El cálculo de la pieza se hará considerando el máximo esfuerzo normal ponderado que actúa sobre ella, para que sea aplicable este procedimiento abreviado es necesario que el esfuerzo normal conserve invariable su dirección durante el pandeo. Esta condición, puede en general, darse por satisfecha en el estudio simplificado del pandeo de los cordones comprimidos de vigas y ménsulas de alma llenas que no estén arriostradas transversalmente.

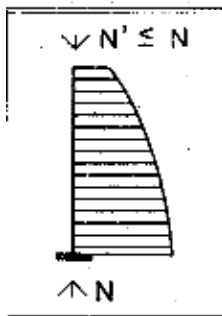
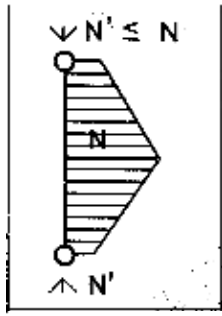
En una pieza solicitada por un esfuerzo normal de compresión variable en forma lineal o parabólica a lo largo de su directriz; el coeficiente se tomará de la

(Tabla 3.2.4.5 pág.124. Piezas de sección constante con esfuerzo normal variable.)



Según el caso, tendremos que el coeficiente

Así mismo lo hace para leyes de este tipo y leyes parabólicas



Hacemos un ejemplo de una viga de un puente

Las vigas verticales trabajan a compresión y las diagonales a tracción.

Viga Pratt: -Longitud  $L$ ;

-Canto  $h$ ;

-Carga uniforme  $P$ ;

-Cordón comprimido no arriostrado lateralmente.

Tenemos que el  $M_f$  en la viga, a una distancia  $x$  será igual a

(ejemplo a repasar)

Entrando en la tabla 3.2.4.5. para ; será entonces la longitud de pandeo .

TIPOS DE TRIANGULACIONES.

Los mas empleados son los siguientes:

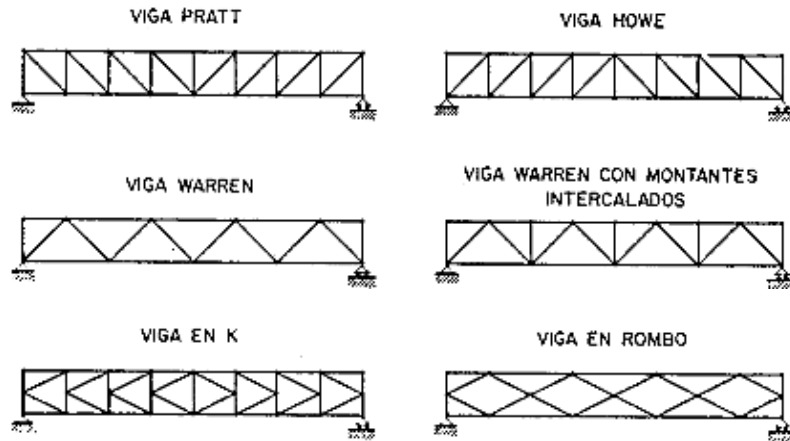
1.-Pratt: Adecuado para luces moderadas; su ventaja principal radica en que las diagonales que son las barras mas largas de las piezas de relleno, están solicitadas generalmente a tracción, mientras que los montantes trabajan en compresión.

2.-Howe: También se emplea para luces moderadas; si bien tiene como inconveniente las ventajas que damos al tipo Pratt; es decir, las diagonales trabajan en compresión mientras que los montantes lo hacen a tracción. Esta viga es la más peligrosa.

3.-Warren: Se utiliza en luces pequeñas y medianas, su aspecto es mas agradable que las citadas anteriormente, ya que su malla es menos tupida.

4.-En K: Es apropiada para grandes luces.

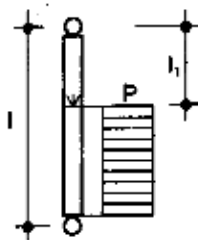
5.-En rombo: También empleada en grandes luces. A estos tipos de triangulación primarios pueden interponerse otros denominados secundarios, cuya misión consiste exclusivamente, en acortar longitudes de pandeo de las barras comprimidas o reducir su flexión.



COEFICIENTE EN PIEZAS DE SECCIÓN CONSTANTE SOMETIDAS A COMPRESIÓN VARIABLE DEBIDO A CARGAS PUNTUALES.

CASO DE CARGA PUNTUAL P1.

En el caso de compresión producida por la actuación de una carga puntual actuando en un punto intermedio de la pieza, la longitud de pandeo se calculará mediante la expresión ; donde se obtiene de la tabla 3.2.4.6 en función de la pieza en sus extremos y de la relación que define la posición de la carga.



En el caso de actuación de  $n$  cargas puntuales el coeficiente de esbeltez será

;

coeficiente que corresponde a , como si actuase aisladamente.

En el ejemplo anterior:

En el cordón comprimido tenemos:

(Tabla 3.2.4.5 pág.124. Piezas de sección constante con esfuerzo normal variable.)

Da los valores de en función de .

Tenemos que saber de nuestra viga a que distribución corresponde.

1.-Identificamos la viga.

2.-Hallamos la relación entre y .

3.-Hallamos el valor de .

Datos y .

Depende del tipo de apoyo que se tenga.

Estamos ante un puente, en el cual, el cordón superior es un cordón comprimido.

Es una ley parabólica biarticulada.

Ahora habría que hallar la relación

Nos vamos a la tabla y para , la toma un valor de 0.692.

#### COEFICIENTE EN PIEZAS DE SECCIÓN CONSTANTE SOMETIDAS A COMPRESIÓN VARIABLE DEBIDA A CARGAS PUNTUALES.

En este caso, vamos a tener un pilar pero aplicamos la carga en un punto medio del pilar.

Tendremos dos casos:

1.-Caso de actuación de una sola carga puntual en un punto indeterminado de la barra, se obtendrá en función de la tabla 3.2.4.6 en función de las vinculaciones de la pieza y de la relación

2.-Caso de actuación de n cargas puntuales  $P_i$ .

En ese caso, el valor de será

Ejemplo.-

$P_1=N$

$P_2=2N$

Siendo N un valor cualquiera.

Ahora tendremos que hallar

Para la tabla, la relación que necesitamos es

tabla 3.2.4.6 EA-95

Para hallar

Entrando en la tabla 3.2.4.6, tendremos que para un pilar empotrado y libre y con una relación  $y$ .

Sabemos que el valor de es:

Sustituyendo los valores

La manera de cargar mas óptima es la de menor .

(Tabla 3.2.4.6. pág. 125 Piezas con una carga puntual intermedia.)

ESBELTEZ MECÁNICA DE UNA PIEZA SIMPLE DE SECCIÓN CONSTANTE.

La esbeltez mecánica se define ; siendo

longitud de pandeo

radio de giro

Sólo tendrá que considerarse que una pieza puede pandear en un plano si no dispone de arriostramiento, de suficiente rigidez, contenido en dicho plano de posible pandeo que impidan el pandeo en toda la altura.

Tenemos un pilar, que va a ser un perfil y aplicamos una carga  $P$  en su centro de gravedad; queremos saber como se comporta el pilar. También definimos unos ejes.

Para estudiar la posibilidad de pandeo; suponemos el perfil empotrado en la base.

Puede pandear, desplazándose con respecto a uno de sus ejes o respecto a los dos.

Vamos a arriostrar el pilar del ejemplo



PLANO XX:

## PLANO YY:

En toda pieza que se considere tendremos que conocer el área (A), los momentos de inercia ( $I_x$  e  $I_y$ ) y los radios de giro ( $i_x$  e  $i_y$ ).

### ESBELTEZ EN PIEZAS COMPUESTAS DE SECCIÓN CONSTANTE.

En piezas compuestas, se denomina eje de inercia material (EM) al que pasa por el baricentro de las secciones de todos los perfiles simples que forman la pieza; al eje que no cumple esta condición se le denomina eje de inercia libre (EL).

Tendremos un perfil compuesto

Vamos a hallar la esbeltez mecánica de una pieza compuesta en un plano perpendicular a un eje de inercia material; consideramos el pandeo como el giro alrededor del eje material.

### GIRO ALREDEDOR EM (PANDEO EN PLANO PERPENDICULAR A EJE DE INERCIA MATERIAL).

La esbeltez mecánica ideal de una pieza compuesta a un plano perpendicular a un eje de inercia libre.

### GIRO ALREDEDOR EL (PANDEO EN PLANO PERPENDICULAR A EJE DE INERCIA LIBRE).

Tendremos que

En este caso

longitud de pandeo;

radio de giro (EL);

número de perfiles simples cortados por el plano de pandeo;

esbeltez complementaria.

La esbeltez complementaria es la esbeltez aportada por las piezas de unión de cordones.

Vamos a ver las mas representativas.

#### a) PRESILLAS:

radio de giro de los cordones.

#### b) DIAGONALES IGUALES:

Sección bruta de todos los cordones;

sección diagonales;

separación entre los ejes de los cordones;

número de diagonales enfrentadas (planos).

### c) MONTANTES Y DIAGONALES.

Sección de montantes.

#### ESBELTEZ MECÁNICA EN UNA PIEZA DE SECCIÓN VARIABLE CON EXTREMOS ARTICULADOS.

En este caso tendremos que el radio de giro

Momento de inercia máximo respecto al eje normal al plano de pandeo;

valor medio del área de la pieza ;

coeficiente según (tabla 3.2.5.4 pág. 129 Coeficiente  $c$  en piezas de sección variable)

Vemos mas recomendaciones sobre la esbeltez. En general se recomienda que

ELEMENTOS PRINCIPALES DE LA ESTRUCTURA;

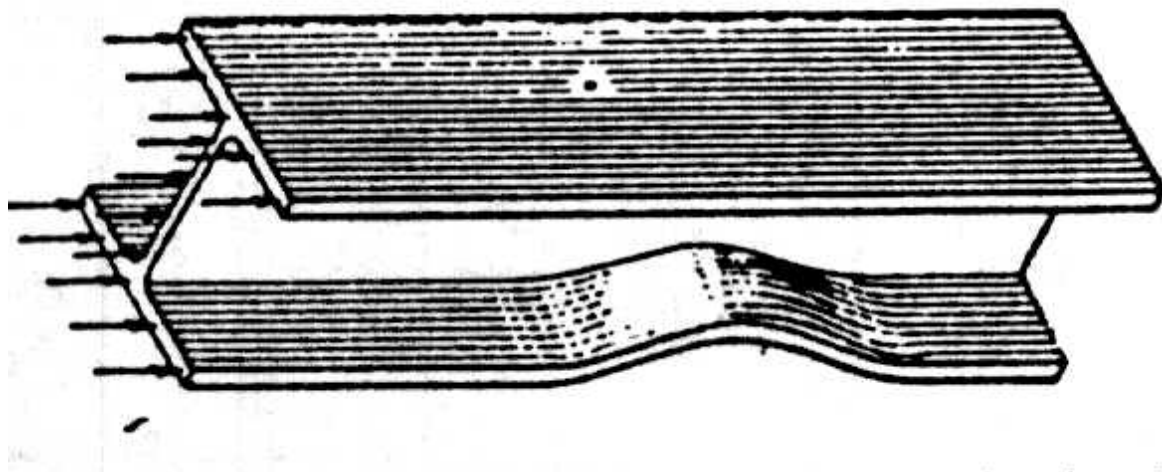
PARA ELEMENTOS SECUNDARIOS Y ARRIOSTRAMIENTO.

Si tenemos cargas dinámicas, reduciremos ese valor a un 25%.

#### ESPESORES DE ELEMENTOS PLANOS EN PIEZAS COMPRIMIDAS.

Si trabajamos con perfiles conformados de chapas, los espesores de dichas chapas deben estar relacionados con sus alturas para evitar abollamientos locales al estar toda la pieza comprimida. Cada elemento plano de una pieza comprimida tendrá espesor suficiente para que no sufra abolladura antes del agotamiento de la pieza por pandeo conjunto.

Abolladura es la deformación normal al plano de una chapa cuando se somete a compresión, lo cual reduzca la sollicitación de agotamiento.



Deberemos comprobar cuando tengamos perfiles formados por chapas

(Tabla 3.2.6 pág. 132 Límite de espesor en piezas comprimidas)

## CÁLCULO DE BARRAS SOMETIDAS A COMPRESIÓN.

- Piezas de simetría sencillas; son aquellas piezas que tienen sección simétrica respecto a un eje de inercia, pero no respecto al otro.
- Piezas de sección doble o puntual; son aquellas piezas que tienen sección simétrica respecto a los dos ejes de inercia.

Cuando estudiemos un caso de pandeo, hemos de considerar la esbeltez según los ejes de inercia; cuando tengamos la mayor estudiaremos el pandeo según su esbeltez.

## PIEZAS SOMETIDAS A COMPRESIÓN CENTRADA.

(Carga aplicada en el centro de gravedad de la sección de la pieza)

Aquí no se producen momentos.

En piezas sometidas a compresión centrada; ha de verificarse que

resistencia de cálculo del acero;

esfuerzo normal o axil ponderado de compresión;

área de la sección bruta de la pieza;

coeficiente de pandeo (Tabla 3.2.7 pág. 133 Coeficientes de pandeo del acero)

## PIEZAS SOMETIDAS A COMPRESIÓN EXCÉNTRICA.

En soportes de estructuras la compresión suele venir, a veces acompañada de flexión; que equivale a un esfuerzo normal actuando excéntricamente, en este caso habrán de realizarse las siguientes comprobaciones en las piezas.

Vemos que significa esto

Se producirán momentos

respecto a los dos ejes.

Las comprobaciones a realizar son:

Comprobación de resistencia.– En barras de sección constante a compresión excéntrica se verificará en todo punto

Esta es la compresión que en el punto mas desfavorable, aguanta la pieza.

En el punto señalado con un círculo tenemos la máxima compresión.

Esta primera comprobación a resistencia hay que hacerla siempre.

Comprobación a pandeo.– En piezas de simetría sencilla o doble; solicitada por una compresión excéntrica

contenida en el plano de simetría en el que puede producirse pandeo en dicho plano y estar impedido en el plano normal a este, se verificará que

Esto se produciría según lo antes comentado; por lo tanto tenemos

CARGA  $N^*$  CONTENIDA EN EL EJE 1

PANDEO PRODUCIDO SEGÚN EL EJE 2 (PLANO 1-1)

PANDEO IMPEDIDO SEGÚN EL EJE 1 (PLANO 2-2)

Es el módulo resistente relativo al borde de compresión.

Además si tenemos piezas de simetría sencilla y el c.d.g. mas próximo al borde comprimido que al traccionado habrá que comprobar que

Módulo resistente relativo al borde en tracción

Si no podemos hacer ninguna de estas comprobaciones, tendremos que en una pieza de doble simetría o simetría puntual;

Esta última expresión es idéntica a la de arriba.

Es función de la mayor esbeltez.

CÁLCULO DE LOS ENLACES DE LAS PIEZAS COMPUESTAS.

Los enlaces de compresión, sometidos a compresión centrada se dimensionarán para resistir las solicitaciones que en ellos provoca un esfuerzo cortante ideal ponderado ( $T^*$ ).

CÁLCULO DE ENLACE CON PRESILLAS

no puede ser menor de 1.

Separación entre cordones;

radio de giro mínimo de los cordones;

área de la sección bruta de los cordones.

CÁLCULO DE ENLACES CON CELOSÍAS.

24

CAPÍTULO III. PIEZAS DE DIRECTRIZ RECTA SOMETIDAS A COMPRESIÓN. TEMA 3.

P

P

L

I , L

Ip ; Lp Iw ; Lw

Iv ; Lv

Pilar al que pertenece el nudo a estudiar

Nudo que queremos estudiar

Lw

Lv

L

Lp

$\beta$

K2

K1

K2

K1

1.0

1.0

0.0

0.0

N

x

N'

N'

N'

N'

h

Cordón comprimido

L

Ley de axiles

N=P

Ley de axiles del cordón comprimido

N'=0

$$N = \frac{P L^2}{8}$$

N'=0

h

P

L

P

N

N

$L_1$

P2

P1

P1+P2

Sería el coeficiente que hemos hallado antes, suponiendo la carga aplicada aisladamente al pilar.

$\beta_i$

0.3 L

P2

P1

L

0.3 L

P1

L

P2

(2)

(1)

G´

G´´

G

y

x

yy

xx

(1)

Plano yy

Pilar girado respecto al eje xx

G´

G

ARRIOSTRADO PLANO YY (ARTICULACIÓN)

LIBRE PLANO XX

{

CABEZA

EL

EM

EL

EL

EM

EL

i1

L1

d

L1

s

d

L1

s

cdg

cdg

cdg

cdg

G

y

x

x

y

x

y

N\*

$$\frac{M_y \ x}{I_y}$$

y

y

$$\frac{M_x \ y}{I_x}$$

x

x

$$\frac{N}{A}$$

G

2

1

N\*