

TRANSPORTE ACTIVO

Estudiaremos qué ocurre cuando estamos en estados estacionarios alejados del equilibrio, cómo se producen ciertos fenómenos.

Para generar el impulso eléctrico en una neurona, necesitamos una diferencia de potencial eléctrico. La membrana celular transporta los iones necesarios.

Partamos entonces de la célula en su estado estacionario y fuera del equilibrio. Si representamos la célula con las concentraciones de los iones de Na y K, así como los potenciales eléctricos que nos encontramos tanto en su interior como en su exterior:

Na Tendencia a pasar iones del exterior al interior por concentraciones [...] y por la diferencia de potencial (iones positivos son atraídos fuertemente por $V = -90$ mv).

K Tendencia eléctrica a entrar debido al voltaje negativo y a salir por difusión para igualar las concentraciones. ¿Cómo se puede saber en este caso cual es el efecto predominante?. Hagamos lo siguiente análisis:

Los potenciales V_{int} y V_{ext} deben ser iguales por lo que:

$$V_{int} = V_i(T) + RT \ln c_i + FzV_i$$

$V_{ext} = V_i(T) + RT \ln c_e + FzV_e$; siendo $V_i(T)$ un potencial de referencia y c_i las concentraciones en el interior y el exterior de la célula.

El equilibrio se alcanzará cuando:

$$RT (\ln c_i - \ln c_e) = Fz (V_e - V_i); F \text{ es el n}^\circ \text{ de Faraday}$$

$$V_e - V_i = \frac{RT}{Fz} \ln \frac{c_i}{c_e}$$
$$! V_e - V_i = \frac{kT}{q} \ln \frac{c_i}{c_e}$$

Haciendo los cálculos para el K^+ :

$V_e - V_i = +98$ mv $>$ -90 mv esto quiere decir que domina su proceso proceso de difusión salida del K^+ al exterior.

Se observa que el n° de iones de Na que entran es proporcional al n° de iones de K que salen permeabilidad de la membrana será **selectiva** porque no deja entrar al sodio de la misma forma que al potasio la membrana no se encuentra en equilibrio.

¿Cómo se controla esto? Con la existencia de una bomba de NaK que bombea hacia fuera el Na que entra masivamente.

Existen dos modelos de transporte activo: **eléctrico** y **termodinámico**.

ELECTRICO: representado por un circuito con la siguiente forma:

Donde: R_a es la resistencia activa interna de la pila la resistencia que ofrecen los poros de la membrana al paso de los iones Na

R_p es la resistencia pasiva a la entrada de Na dentro de la célula permeabilidad de la membrana al sodio.

E_{Na} es la f.e.m. reacción metabólica.

Problema del modelo:

La pila que debería ser un parámetro puramente energético, contiene también factores de permeabilidad.

Cuando se introduce *aldosterona*, se encuentra que la afinidad química de la pila aumenta (es decir, se acelera) y sin embargo la f.e.m. permanece constante.

Disminuye la permeabilidad de la membrana y aumenta la f.e.m.

TERMODINAMICO: (más completo)

A afinidad química fuerza que dirige la reacción dependerá de las concentraciones de las especies reaccionantes.

Flujo del sodio diferencias de los potenciales electro-químicos a ambos lados de la membrana (i y e).

Escribimos las ecuaciones fenomenológicas de los flujos:

$$J_r = L_{\text{Na}r} X_{\text{Na}} + L_r A$$

$$J_{\text{Na}} = L_{\text{Na}} X_{\text{Na}} + L_{\text{Na}r} A$$

—Siendo: J_r el *flujo de ritmo* de reacción metabólica.

L_r el *ritmo* con el que se produce la reacción metabólica.

L_{Na} la *permeabilidad pasiva* del sodio.

$L_{\text{Na}r}$ el *acoplamiento* entre la reacción metabólica y el flujo de sodio.

Relación entre la f.e.m. de la pila (modelo eléctrico) y los parámetros del modelo termodinámico:

$$E_{\text{Na}} = \frac{1}{F} \frac{L_{\text{Na}r}}{L_{\text{Na}}} A$$

Grado de acoplamiento entre ambos procesos viene dado por:

$$q = L_{\text{Na}r} \frac{L_r}{L_{\text{Na}}}^{\frac{1}{2}}$$

La estabilidad del estado estacionario es un problema básico en Termodinámica de los seres vivos. Cuando se produce una perturbación de este tipo, ¿cómo reaccionará el sistema?, ¿lo asumirá o tendrán lugar

transformaciones drásticas?.

3.2:Teoría no lineal

Caracterización de un estado en equilibrio de un sistema por un valor extremo de un potencial termodinámico.

Sistema aislado S max

–Evolución: P, T ctes G min (pot. De Gibbs)

P, V ctes F min (unción de Helmholtz)

¿Cómo asimila un sistema que se encuentra en equilibrio una perturbación realizada sobre el mismo?.(p.e. las neuronas necesitan un potencial mínimo para salir de su equilibrio).

La inestabilidad de los estados de equilibrio suele ir acompañada de la *aparición de estructuras* o cambios de fase, como sucede en el agua a cero grados, que con una leve agitación se convierte en hielo.

La situación de los estados estacionarios fuera del equilibrio es muy parecido.

Apartándose gradualmente del equilibrio, llega un momento en que el correspondiente estado estacionario, deja de ser estable, dando lugar a una *mutación estructural*. Para ello es necesario aportar energía, ya que de otra forma la estructura desaparecería.

Un ser vivo es un ejemplo paradigmático de todo esto porque para mantenerse necesita de un suministro de energía para no perecer.

Prigogine Estudió estas estructuras disipativas (son aquellas que necesitan energía para mantenerse)

La existencia de estas estructuras disipativas, son de gran importancia para estructurar en el tiempo y en el espacio de los seres vivos. Tenemos un aumento del orden en contra de lo que dice el primer principio (!S). Esto se soluciona diciendo que el sistema no se encuentra aislado sino que interactúa con el medio.

Criterios de estabilidad

Supongamos que un sistema evoluciona a P, T ctes G min

$G=G(T, P, x)$ donde x representa la *fracción de gas* del sistema (cantidad de sustancia como vapor, gas, etc)

*Si $G = a(T,P)$ x^2 observamos:

–Si $a>0$ mínimo en $x=0$ no hay fracción de gas la fase está condensada (líquido o sólida) su estado de equilibrio será estable porque G mínimo.

*Si $G = a(T_0 - T)x^2 + b x^4$ observamos:

$$\frac{dG}{dx} = 2a(T_0 - T)x + 4bx^3$$

$x=0$

$$x = \frac{a}{2b}(T - T_0)^{1/2}$$

-Si $T < T_0$ $\sqrt{(-)}$

! $x=0$ sería el único valor extremo

$$\frac{d^2G}{dx^2} = 2a(T_0 - T) + 12bx$$

-Si $T > T_0$ serían válidas las tres soluciones 1 max y 2 min.

Resumiendo:

$T < T_0$! sistema en una sola fase

$T > T_0$! aparece parte condensada, líquido y gas, aumentando la fracción de gas con la temperatura.

Transiciones de 1er orden: ebullición: T crítica (T_0) el sistema pasa a estado gaseoso.

Transiciones de 2o orden: T crítica (T_0) T cualquiera; coexistencia de estados

Cuando representamos el valor de x anteriormente introducido:

-Cuando el sistema llega a T_0 , tiene que optar por la elección de una de las ramas. Esto es puramente **azar** mediante la *dinámica de fluctuaciones* (mutaciones en Biofísica). ¿Es aplicable a sistemas biológicos?. (ver transp. Modelo mecánico del fenómeno de bifurcación).

Bifurcación inversa recuerda a un ciclo de histéresis de electromagnetismo.

(est. Equilibrio estable ! G min ($dG/dx = 0$))

Estabilidad de los estados estacionarios fuera del equilibrio

Criterio de estabilidad: $S > 0$ (1) (" pequeña fluctuación del sistema)

Influye el tiempo por estar fuera del equilibrio y tener por tanto, implicaciones dinámicas. Se debe cumplir entonces que:

$$\frac{d(\delta^2 S)}{dt} > 0$$

(2)

Supongamos que (1) se satisface automáticamente (suficientemente alejados de cambios de fase), entonces:

$$(2) = \delta^2 \frac{dS}{dt} = \delta^2 \sigma > 0$$

" variación temporal de entropía

Condiciones donde los sistemas dejan de ser estables.

$$= \text{flujos} * \text{fuerzas} = Jx$$

$= J * x$ ¿A qué se deben estas perturbaciones? serán de origen externo, fluctuaciones espontáneas del sistema, etc.

Por otro lado los flujos se expresan por las ecs. fenomenológicas ; consideraremos dos casos:

a) La ley fenomenológica que define el flujo es lineal.

$$J = L * x$$

$$-\text{Entonces: } \frac{d}{dt}(x^2) > 0 ; L > 0$$

–Encontramos que los estados estacionarios alejados del equilibrio, descritos por las ecs fenomenológicas lineales *siempre son termodinámicamente estables*.

b) Supongamos que las leyes fenomenológicas **no** son lineales:

$$J = Lx - L'x^2$$

$$-\text{Entonces: } \frac{d}{dt}(x^2) = Jx = L(x)^2 - 2L'x_0(x)^2$$

x_0 será el valor de la fuerza termodinámica correspondiente antes de producirse la modificación. Puede ser negativo si $x_0 > \frac{L}{2L'}$

. Si la fuerza termodinámica, causante de la inestabilidad, crece por encima de un valor crítico x_0 , el estado estacionario dejará de ser estable.

¿Aparecerán estructuras, ordenaciones, etc, u otro tipo de fenómenos cuando se pasa de estos valores críticos? (T_0, x_0).

ORDENACION EN EL TIEMPO Y EN EL ESPACIO

Para este tipo de sistemas estacionarios alejados del equilibrio, tendremos las ecs fenomenológicas con términos no lineales.

Ordenación de un flujo convectivo (Benard) estructuración que aparece en un sistema alejado del equilibrio (leer artículo relacionado).

Las estructuras de las revoluciones científicas. KUHN, T.S.(1978)

Experimento: Calentamiento de un fluido viscoso de viscosidad η con densidad ρ mantenido entre dos placas horizontales. El coeficiente de dilatación térmica del fluido es α .

- Equilibrio: $T_1 = T_2 = T$ (al principio)
- El líquido no presenta ningún tipo de estructuración (a nivel macroscópico).
- Al aumentar T_2 se produce un calentamiento por convección capas del líquido transmitiendo calor (ascendiendo, por Arquímedes). Existirá una resistencia a que la capa suba debido a la viscosidad y la densidad.

- Cuando $T_2 - T_1$ es pequeña, los efectos disipativos (y rozamiento) son superiores a los de dilatación, por lo que el fluido permanecerá inmóvil.
- Cuando $T_2 - T_1$ alcanza un valor crítico, los efectos ascensionales igualan a los disipativos, por lo que para valores ligeramente superiores al valor crítico, predominarán los ascensionales y el líquido comenzará a moverse. A partir de este momento, el fluido se estructura en cilindros. Si se deja de calentar, estos desaparecerán.

Sistemas suficientemente alejados del equilibrio presentan estructuraciones espontáneas.

Bibliografía: Sinergetys (Sinérgica)

Se debe alimentar energéticamente al sistema para que se mantengan las estructuras.

Existen unos *números adimensionales* que vienen dados por la caracterización en el estudio de los fluidos mediante un estudio matemático. (análisis adimensional)

Uno de esos números es el **número de Raleigh**:

$$Ra = \frac{g\alpha d^3}{\eta k} (T_2 - T_1)$$

es el coeficiente de dilatación cúbica

k es la difusividad térmica

nº crítico ($T_2 - T_1$) " 1707 k/g d³ a partir de este número aparecerán las estructuras de las que hemos estado mencionando.

El estudio de la distribución de velocidades en función de las distancias nos sale con una cierta periodicidad y tiene la siguiente expresión:

$$v(x) = \frac{Ra - Ra_c}{\phi}^{\frac{1}{2}} \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$$

; es la longitud de onda (de repetición de las celdas)

Tenemos entonces un fenómeno de estructuración + fenómeno periódico.

Gráficamente:

El caso más espectacular, es cuando se quita la lámina de arriba y aparece una tensión superficial.

La superficie libre en contacto con el aire (sup. de interfase liq-gas) se estructura en esas celdas hexagonales, y por el medio, el líquido desciende para provocar esos movimientos convectivos. (magma)

El alejamiento del equilibrio es un factor ordenador ó estructurador favorece una mutación. En lenguaje físico se entendería como una ruptura de simetría, porque la homogeneidad de la traslación se ha perdido. Esta estructura es periódica.

Ordenación espacial (más importante para s.b.)

Es el modelo de **Brusselator**, que consiste en una serie de reacciones químicas con los siguientes gases:

A x

B + x y + D

2x + y 3x

x E

Donde k_i son las ctes de reacción; A y B mantenidas desde fuera a concentración cte (lenta o bien, por el suministro continuo de A y B); D y E lo que se produce.

Un estudio de x e y (sobre lo que no podemos incidir):

$$\frac{dx}{dt} = A - (B+1)x + x^2 y + D_x - \frac{d^2 x}{dr^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = Bx - x^2 y + D_y - \frac{d^2 y}{dr^2}$$

El sistema tiene una solución estacionaria dada por:

$$x_0 = A ; y_0 = B/A$$

–Sólo serán estables cuando los valores de las concentraciones de B sean menores que un valor crítico dado por:

$$B_c = A^2 + 1 + \frac{m\pi^2}{l^2} (D_x + D_y)$$

–Con l longitud del sistema y m un valor que indica el tipo cuantificación.

–Cuando $B < B_c$ sistema uniforme

–Cuando $B > B_c$ sistema no uniforme y la concentración de x varía periódicamente. Además:

$$x = A + \frac{B - B_c}{\phi}^{1/2} \cos \frac{m\pi r}{l} + \Omega(B - B_c)$$

Ordenación espacial

–Esto se debía a la tercera reacción porque aparecen términos no lineales.

Este modelo es aplicable a muchos sistemas biológicos, como por ejemplo, la diferenciación celular (ordenación espacial).

Hidra (célula) división células de cabeza.

Se encuentra una determinada sustancia que cuando tiene concentración determinada, las células que se forman son de cabeza. ¿Por qué se acumula esta sustancia a una determinada distancia del sistema?, Brusselator lo explica con el r de su ecuación.

Ordenación temporal (aparición de relojes biológicos)

Modelo de **Lotka-Volterra**, sus aplicaciones son ecuaciones de flujo difusivo:

$$J_1 = \frac{dx_1}{dt} = k_1 x_1 - k_2 x_1 x_2$$

$$J_2 = \frac{dx_2}{dt} = k_2 x_1 x_2 - k_3 x_2$$

–Siendo x_1 los animales de una especie (peces), con potencial biótico (nacimientos–muertes) k_1

– x_2 otro tipo de peces

–1 se alimenta de la especie 2 y éste a su vez de plancton

– k_3 es el potencial biótico de la especie 2

– $k_2 x_1 x_2$ son términos de interacción entre las dos especies.

Se obtienen del sistema anterior las siguientes soluciones estacionarias:

$$x_{10} = \frac{k_3}{k_2}$$
$$; x_{20} = \frac{k_1}{k_2}$$

¿Es estable?

Introducimos unas perturbaciones dadas por:

$$x_1 = x_{10} + \delta x_1$$

$$x_2 = x_{20} + \delta x_2$$

Introduciéndolas en el sistema:

Tenemos que:

$$\frac{d(\delta x_1)}{dt} = k_1 \delta x_1 - k_2 (x_{10} \delta x_2 + x_{20} \delta x_1)$$

$$\frac{d(\delta x_2)}{dt} = k_2 (x_{10} \delta x_2 + \delta x_{20} \delta x_1) - k_3 \delta x_2$$

Teniendo en cuenta las soluciones estacionarias, podemos deducir que:

$$\frac{d(\delta x_1)}{dt} = -k_2 x_{10} \delta x_2$$

$$\frac{d(\delta x_2)}{dt} = -k_2 x_{20} \delta x_1$$

Obtenemos:

$$\frac{d^2(\delta x_1)}{dt} = -k_2^2 x_{10} x_{20} \delta x_1$$

Cuya solución será:

$$\delta x_1 = \delta x_1(0) \cos(2\pi f t)$$

Donde la frecuencia f, vendrá dada por:

$$f = \frac{1}{2\pi} (k_2 x_{10} x_{20})^{1/2} = \frac{1}{2\pi} (k_1 k_3)^{1/2}$$

Esta frecuencia nos indica que el estado estacionario no es estable, porque al introducir las perturbaciones lineales x_1 , x_2 , aparece una estructuración que no es amortiguada sino oscilante con cierto periodo.

Introduzcamos ahora una perturbación no lineal mediante los siguientes parámetros:

$$\alpha = \ln \frac{x_1}{x_{10}}$$

$$\frac{1}{k_2} \frac{d\alpha}{dt} = x_{20} (1 - \exp[\beta])$$

$$\beta = \ln \frac{x_2}{x_{20}}$$

$$\frac{1}{k_3} \frac{d\beta}{dt} = -x_{10} (1 - \exp[\alpha])$$

De donde:

$$\frac{1}{k_2} \frac{d\alpha}{dt} x_{10} (1 - \exp[\alpha]) + \frac{1}{k_3} \frac{d\beta}{dt} x_{20} (1 - \exp[\beta]) = 0$$

Que se puede reescribir como:

$$\frac{d}{dt} \frac{x_{10}}{k_2} (\exp[\alpha] - \alpha) + \frac{x_{20}}{k_3} (\exp[\beta] - \beta) = 0$$

! cte del movimiento

Una vez fijadas las condiciones iniciales, el sistema se moverá en una órbita determinada fija y constante. Es decir, el sistema no reacciona contra la perturbación. Quiere decir esto que el *comportamiento Lotka-Volterra depende de las condiciones iniciales*.

En los sistemas disipativos, es más frecuente un tipo de órbita **ciclo-límite**. Aquí el sistema, sean cuales sean las condiciones iniciales, tiende a una determinada órbita.

Las ecuaciones de Brusselator son ciclo-límite y se pueden reescribir como:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 A - k_2 Bx + k_3 x^2 y - k_4 x$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2 Bx - k_3 x^2 y$$

Resolviendo este sistema se obtienen las soluciones estacionarias:

$$x_0 = A \frac{k_1}{k_4}$$

$$; y_0 = \frac{B k_2 k_4}{A k_1 k_3}$$

Introduciendo ahora la siguiente perturbación:

$$x = x_0 + \alpha \exp[\lambda t]$$

$$; y = y_0 + \beta \exp[\lambda t]$$

Tenemos:

$$\alpha \lambda = B \frac{k_2}{k_4} - 1 \alpha + A^2 \frac{k_1}{k_4} \frac{k_3}{k_4} \beta$$

$$\beta \lambda = -B \frac{k_2}{k_1} \alpha - A^2 \frac{k_1}{k_4} \frac{k_3}{k_4} \beta$$

Las perturbaciones iniciales son distintas de cero, entonces:

$$\lambda^2 + (a^2 + 1 - b)\lambda + a^2 = 0$$

siendo:

$$a = A \frac{k_1}{k_4} \frac{k_3}{k_4}^{1/2}$$

$$y b = B \frac{k_2}{k_4}$$

Si las partes reales de las soluciones α , β , son mayores que cero las perturbaciones aumentan y el sistema se hace más inestable. Si son menores que cero, ocurre lo contrario y el sistema se estabiliza.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1}{2} (a^2 + 1 - b) \left[(a^2 + 1 - b)^2 - 4a^2 \right]^{1/2}$$

Analizando esta expresión deducimos:

–Sistema estable ! $b < a^2+1$

–Sistema inestable ! $b > a^2+1$

–Cuando $a^2+2a+1 > b > a^2-2a+1$ tenemos un movimiento oscilatorio (soluciones imaginarias no nulas) amortiguadas en la zona estable.

–Cuando $b < a^2-2a+1$ decrecen las perturbaciones exponencialmente.

–Cuando $b > a^2-2a+1$ crecen las perturbaciones exponencialmente.

–Si $b = a^2 + 1$ oscilaciones dependientes de las condiciones iniciales! ciclo Lotke Volterra.

–Si $b > a^2+2a+1$ tenemos un ciclo–límite

a y b dependen de A y B (condiciones iniciales).

En la Naturaleza un sistema biológico debe ser oscilatorio por varios argumentos entre los que destaca el que dice que debe ser así, porque el desarrollo biológico ocurre en la Tierra que tiene movimientos periódicos oscilatorios.

Algunos ejemplos:

- Ritmo cardiaco independiente de magnitudes externas como presión, temperatura, etc.
- Los períodos de sueño y actividad están regulados cada 24 h.
- Peces de la zona Bival que suben a la superficie cada 24h.
- Una clase de penicilina sufre un ritmo de crecimiento y esporación cada 24 h. Aprox.
- Existen flores que se abren y cierran cada 23h.
- Mitosis y división celular se produce cada 24h.

RUTAS HACIA EL CAOS

Vamos a alejarnos un poco más del equilibrio (a partir de un parámetro crítico ya estudiado), de esta forma se llega a una situación caótica. Se produce una cascada de bifurcaciones según se van traspasando unos valores críticos (en el gráfico , , , etc).

¿Se puede observar algo de regularidad en la formación de bifurcaciones hacia el caos?. En el 75, Michael Feigenbaum estableció la siguiente relación:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n - \beta_{n-1}}{\beta_{n+1} - \beta_n} = 4.669201 \quad (n \text{ grande})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_n}{\epsilon_{n+1}} = 2.5022$$

Ejemplo de cómo nos vamos acercando a estos números:

$$x_{n+1} = \beta x_n (1 - x_n)$$

); $1 < \beta < 4$

en n° de individuos de una especie determinada (n podría ser el año)

Si β es pequeño, mediante cálculos sencillos se puede ver que:

$$x_n \rightarrow x^* = \frac{\beta - 1}{\beta}$$

Independiente del valor del que hayamos partido, es decir, sin condiciones iniciales.

β^* " **atractor** como un péndulo oscilante que tiende al punto de equilibrio

Se pueden clasificar en:

- De punto fijo
- De ciclo límite
- Toro atractor

" β^* el sistema oscila entre x^*1 y x^*2 , con lo que el atractor duplica su periodo.

$\beta = 3.449$ atractor de grado 4 (el ciclo se repite cada 4 ciclos o generaciones)

$\beta > 3.569945$ No hay una pauta reconocible, trayectoria o estructura que podamos clasificar según lo estudiado con anterioridad.

(n!) Haciendo los límites de los cocientes de las x_n , se encuentra que da el valor 4.66..

De la misma forma ocurre con el cociente de las y_n .

Estos números se han encontrado en multitud de sistemas físicos como por ejemplo:

- Movimiento de un fluido y transición de régimen laminar a régimen turbulento.

Conceptualmente estos números representan la transición del orden al caos.

Otro tipo de atractores (extraños):

Lorentz planteó el siguiente conjunto de ecuaciones: (para el estudio de la convección en la atmósfera).

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y$$

$$\frac{dy}{dt} = -xy + rx - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

Cuando se deduce la solución de este conjunto de ecuaciones aparece el atractor de Lorentz.

Otro atractor famoso es el de **Rössler**:

$$\frac{dx}{dt} = -(\gamma + z)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = x + a\gamma$$

$$\frac{dz}{dt} = a - bz + xz$$

Otro es de **Hénon**:

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + b\gamma_n$$

$$y_{n+1} = \gamma_n$$

El atractor de Lorentz, se puede aplicar a la Meteorología, para la explicación sobre cambios climáticos. Cada periodo de tiempo se repiten los estados del tiempo (con números aleatorios).

Magnetismo terrestre: polo sur magnético coincidente o no, cada cierto número de años con el polo norte geográfico. Sucesión de números caóticos atractor extraño.

Fisiología: fibrilación del corazón estructuras caóticas.

Hidronámica: movimiento de fluidos.

Como conclusión, los atractores extraños se vinculan con la irregularidad ya que se pueden describir mediante ecuaciones más o menos sencillas (fenómenos irregulares).

ORDEN ESPACIAL Y GEOMETRICO

Conceptos de dimensiones: toman valores enteros que serán los grados de libertad.

Sin embargo, así definidos pueden tener fallos estudio de la *curva de Peano* que puede cubrir un cuadrado.

Con un solo número se puede describir toda la curva y entra en contradicción con las dimensiones del plano. Entonces redefinamos este concepto de dimensión:

- **Dimensión de semejanza:** imaginamos que dividimos una línea, un cuadrado o un cubo en mitades, entonces:

Línea 21 partes

Cuadrado 22 partes

Cubo 23 partes

Generalizando el resultado, si una forma cualquiera está compuesta de a^D formas semejantes de dimensión $1/D$, D es la dimensión de semejanza. La curva de Peano tiene $D=2$.

No está restringida a números enteros:

$$D_s = \frac{\log b}{\log a}$$

Curva de Koch: $b=4$; $a=3$; $D_s=1.2618...$ (entre 1 y 2)

D_s nos indica que no es ni una línea ni un plano, se encuentra entre las dos. Nos acerca al conocimiento más real del sistema.

Tratamos de relacionar dimensión con complejidad.

Problemática: la forma que no se puede dividir en formas semejantes.

• **Haudorff:**

$$M_D(E) = \lim_{r_k \rightarrow 0} r_k^D ; \quad r_k <$$

Sean D , " números reales. Tenemos un conjunto E que lo cubriremos por esferas o círculos de radio r . Los diámetros serán menores que ".

Esta dimensión de Haudorff es D .

Curva de Koch cubierta con círculos mejor con infinitos círculos.

Con r 1ª dimensión sería la suma de los radios"1

Area de la curva: πr_i^2

Volúmenes

etc

• **Dimensión de capacidad (KOLMOGOROV)**

Cubriendo con esferas de radio $1/n$

$$D_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(E)}{\log \frac{1}{n}}$$

;

Cubrimos el espacio D dimensional con esferas iguales . Si n es suficientemente pequeño podemos escribir :

$$N() = \frac{1}{n^{D_c}}$$

Si $D < D_c$, la medida D dimensional diverge si $D < D_c$ y converge a cero si $D > D_c$.

COSTA:

$N(r)$ número de segmentos necesarios para unir la costa. Variando r $N(r)$ variará.

Si la costa es una línea $N(r) \propto 1/r$

Pensando en la curva de Koch $N \frac{1}{3} = 4$

-Con áreas $N \frac{1}{3}^2 = 4^2$

$$\frac{1}{3}^{-\log_3 4} = 4 \quad N(r) \propto r^{-\log_3 4}$$

En general tendremos:

$$N(r) \propto r^{-D}$$

con D dimensión fractal de esta curva.

Pendiente de una recta: $a = 1 - D$; $1 > D > 1,4$

(D dimensión fractal de las costas japonesas)

-Si D aumenta, la costa es más accidentada. También se pueden estudiar paisajes, relieves terrestres, etc. $(D+1)=2,2$.

Río Amazonas: Rama principal

$$L \propto 1,89 A^{0,6} ; \quad A^{1/2} \propto L^{1,2}$$

L corriente principal

A área de drenaje

1.2 dimensional fractal del río

1.85 sería la dimensión fractal con sus afluentes (mediante cajas)

1.4 sería la dimensión del Nilo.

La dimensión fractal se ve afectada por lluvias, clima, etc.

Arboles pueden ser cubiertos con cajas (con afluentes) ó con circunferencias.

Campo magnético interplanetario Voyager 2, con unas fotos próximas a Saturno nos daba una dimensión de $1,5/3=D$.

Dimensión fractal de una macromolécula o proteína

Desde el carbono con un patrón de medida $N()$ (de carbono a carbono).

Según criterios tenemos diferentes niveles de detalle:

! !!detalle de la medida.

Representando frente a log tenemos una pendiente que será la dimensión fractal.

Según la proteína, tendremos dimensiones dependientes del patrón de medida:

1.3, 1.9, 2

Una cadena gaussiana distribución al azar ($D=1.5$)

Repulsiones a la cadena hacen que se encuentre más extendida.

$[Na^+]=12$

$[K^+]=155$

$V_e=-90$ mv

$[Na^+]=145$

$[K^+]=4$

$V_i=0$ (potencial eléctrico)

$1/NA$

Ec. De Nerst

R_a

R_p

E_{Na}

! 3 extremales

$T < T_0$

x

G

ESTABLE

ESTABLE

estable

T

x

T0

Sol. única

x

T0

T

T1=cte (refrigerada)

calor

T2 (controlable)

v

ESTABLE

K3

K1

T2- T1

K2

ESTABLE

K4

A + B D + E

Dx y Dy son los coeficientes de difusión de x e y

Ecs. de Volterra

Hacia el caos

, r , b son parámetros positivos dependientes del sistema objeto de estudio.

x movimiento convectivo

y , z movimiento horizontal y vertical dependiente de la temperatura.

1, 2, y 3, es la dimensión espacial en cada caso.

b nº de formas semejantes de las que está compuesta la forma..

a es el tamaño

Dimensión de semejanza

Donde $N(E)$ es el número mínimo de esferas que necesitamos para recubrir un espacio D -dimensional.