

- Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Sol: Cada rama de la función es continua y derivable en donde está definida por tratarse de funciones continuas y derivables en todo su dominio (exponencial y polinómica). Donde puede existir discontinuidad es en los puntos $x=0$ y $x=1$.

Estudio de la continuidad en $x=0$.

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x^2 = 1$$

. Por tanto se cumple: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$

y la función es continua en $x=0$.

Continuidad en $x=1$.

$$f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$$

y la función también es continua en $x=1$. Consecuentemente la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Estudio de la derivabilidad en el punto $x=0$.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ -2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(0)^- = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$f'(0)^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 = -2$$

No existe $f'(0)$

y por tanto $f(x)$ no es derivable en $x=0$.

Derivabilidad en $x=1$.

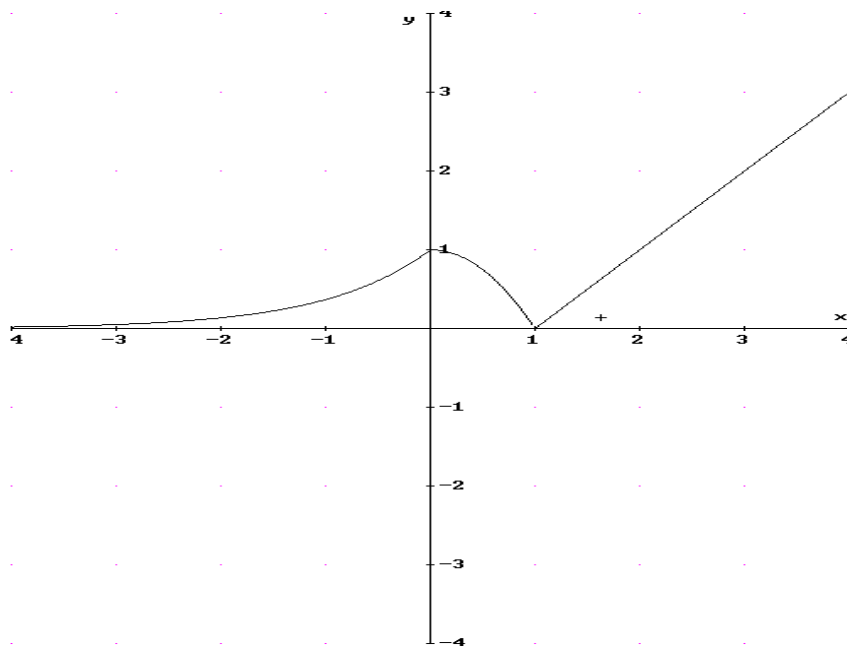
$$f(1)^- = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -2x = -2$$

$$f(1)^+ = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$$

No existe $f'(1)$

y por tanto $f(x)$ no es derivable en $x=1$.

Consecuentemente $f(x)$ es derivable en : $\mathbb{R} - \{0,1\}$



La gráfica de la función es la siguiente:

- Calcula los valores de a y b para que la función siguiente sea derivable en todo $\mathbb{R}$ y calcula $f'(x)$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & \text{si } x < 1 \\ 2bx - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Sol: Cada rama de la función es continua y derivable en sus intervalos de definición por tratarse de funciones polinómicas. Por tanto tendremos que imponer las condiciones de continuidad y derivabilidad en $x=1$.

Continuidad en $x=1$.

$$f(1) = a + b - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + bx - 1 = a + b - 1 \quad a + b - 1 = 2b - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2bx - 2 = 2b - 2$$

(I) para que $f(x)$ sea continua en $x=1$. Impongamos ahora la condición de derivabilidad en dicho punto.

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x < 1 \\ 2b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(1)^- = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2ax + b = 2a + b$$

$$f(1)^+ = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2b = 2b$$

$$2a + b = 2b$$

(II) para que $f(x)$ sea derivable en $x=1$.

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (I) y (II) se obtienen los valores $a=1$ y $b=2$. Entonces :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Calcula la ecuación de la recta tangente y normal a la curva de ecuación $y - \ln x = 0$ en el punto de abscisa 1.

Sol:

$$y = \ln x$$

$$y(1) = \ln 1 = 0$$

$$y(x) = \frac{1}{x} \quad y(1) = 1 = m$$

$$y - 0 = 1(x - 1) : \text{tangente}$$

$$y - 0 = -1(x - 1) : \text{normal} \quad \text{donde } m = \frac{-1}{m} = -1$$

- Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica si es posible:

$$a) y = \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$b) y = e^{\ln \sin^2 x} = \sin^2 x$$

$$y = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\text{También } y = 2 \cot gx \cdot e^{\ln \sin^2 x}$$

- Calcula el valor de los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} = \frac{-1}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} = \frac{1 - \cos 1}{(e - 1)^2}$$