

• INTRODUCCIÓN.

La Mecánica del Suelo como una parte de las ciencias físicas que tratan de explicar el mundo real, estudia su comportamiento mediante la creación de modelos matemáticos que sean capaces de predecir las reacciones del terreno frente a unas determinadas solicitudes. Dada la complejidad de la realidad física del terreno, no puede esperarse que un único modelo matemático sirva para explicar todas las facetas de su comportamiento.

Cuando la Mecánica del Suelo comenzó a organizarse como un cuerpo de doctrina se encontró con un modelo matemático muy perfeccionado, la teoría de la elasticidad, que se había desarrollado a lo largo del siglo XIX.

La teoría de la elasticidad permite asemejar el comportamiento de algunos suelos a un modelo elástico. Sin embargo, para que esto sea posible se han de cumplir algunas condiciones como es que el suelo esté alejado de la rotura, es decir, sometido a un nivel de tensiones bajo. Por lo tanto, existen una serie de suelos para los que no es aplicable el modelo elástico.

• APLICACIÓN DE LA TEORÍA DEL SEMIESPACIO ELÁSTICO.

El francés Boussinesq, en 1885, consiguió resolver matemáticamente el problema de calcular las tensiones generadas por una carga puntual actuando normalmente sobre un semiespacio.

El espacio de Boussinesq es un ente que sustituye en primera aproximación al terreno. Para las aplicaciones prácticas dicho espacio está limitado únicamente por un plano horizontal, constituyendo entonces el semiespacio de Boussinesq. Éste es elástico, homogéneo e isotropo. Al decir elástico se entiende en sentido restringido, es decir, se supone que cumple la ley de Hooke y que el coeficiente de elasticidad es el mismo en tracción que en compresión. Se supone también que la materia que constituye el semiespacio tiene resistencia suficiente para seguir respondiendo elásticamente bajo las tensiones que se produzcan en todos y en cada uno de los puntos del semiespacio.

Las fórmulas obtenidas por Boussinesq en coordenadas cilíndricas son:

En ninguna de las fórmulas aparece el coeficiente de elasticidad, las cuales dependen, en cambio del coeficiente de Poisson, excepto en las fórmulas de σ_z y σ_rz .

El asiento de los puntos correspondientes a la superficie viene definido por:

La gráfica corresponde a una hipérbola equilátera ya que σ_z y s son las dos coordenadas cartesianas de la deformada de la superficie. Se puede observar que en el punto de aplicación de la carga se corresponde con un asiento infinito, lo cual no corresponde a la realidad, sino al empleo del concepto teórico de una carga aislada concentrada, que produce esfuerzos infinitos en el punto de aplicación. Por ello, esta fórmula no debe emplearse para el cálculo de asientos de puntos situados en el entorno de aquél.

En el caso que se desee conocer el asiento producido en un punto interior del terreno se tiene:

Esta expresión no es más que una generalización de la referida a los puntos de la superficie, que se obtiene haciendo $\sigma_z = \sigma_r / 2$. Además, esta expresión permite conocer el asiento producido en terrenos estratificados.

• Carga lineal aplicada sobre la superficie de un semiespacio elástico infinito.

Cuando la carga es vertical, la solución de este caso corresponde a la integración de la del problema de Boussinesq.

â Tabla 3.3

TABLA 3.3 ($\frac{z}{I} = P \cdot I_q/z$)							
x/z	Iq	x/z	Iq	x/z	Iq	x/z	Iq
0.00	0.6366	0.20	0.5886	0.60	0.3441	1.40	0.0726
0.02	0.6361	0.24	0.5691	0.64	0.3203	1.60	0.0501
0.04	0.6346	0.28	0.5474	0.68	0.2976	1.80	0.0353
0.06	0.6320	0.32	0.5238	0.72	0.2760	2.00	0.0254
0.08	0.6284	0.36	0.4989	0.76	0.2557	2.20	0.0186
0.1	0.6241	0.40	0.4731	0.80	0.2366	2.50	0.0120
0.12	0.6187	0.44	0.4468	0.90	0.1942	2.70	0.0092
0.14	0.6124	0.48	0.4204	1.00	0.1591	3.00	0.0063
0.16	0.6052	0.52	0.3944	1.10	0.1302	4.00	0.0021
0.18	0.5973	0.56	0.3689	1.20	0.1068	8.00	0.0001

- **Cargas rígidas y flexibles.**

En el medio elástico las tensiones y deformaciones son proporcionales a las fuerzas aplicadas al semiespacio. En el caso de cargas lineales conocidas, aplicadas sobre un terreno, las soluciones están completamente definidas. Ahora bien, en el caso de cargas repartidas, la distribución de la carga depende de la interacción tenso - deformacional entre la estructura total transmisora de la carga con su cimentación y el terreno, con lo que la solución es algo más compleja.

En el caso de un círculo cargado uniformemente, el asiento del punto se halla integrando los acortamientos de todos los elementos del terreno situados en la vertical del punto por debajo de él. De esta manera, el asiento del centro resulta ser:

Donde p es la carga por unidad de superficie y R el radio del círculo.

Si se hace lo mismo en la vertical del borde del círculo se obtiene un asiento menor:

Por último, el asiento medio será:

De estas fórmulas se pueden extraer dos conclusiones: la primera es que el asiento es proporcional al radio. Esta relación dimensional es general, si bien requiere que el coeficiente de elasticidad sea constante con la profundidad, y que ésta sea infinita. En segundo lugar, se observa que pese a que todos los puntos están cargados uniformemente, el asiento no es igual en todos ellos, siendo mayor en el centro. Esto se suele cumplir en casi todos los casos teóricos, con excepción de algunos donde la capa compresible es pequeña en relación con las dimensiones de área cargada, pero no suele coincidir con la realidad.

En la mayoría de los casos, la uniformidad de carga sobre una superficie no se traduce en una uniformidad de asiento. Así pues, las cargas flexibles son las que se obtienen de considerar que las cargas aplicadas son uniformes; mientras que las cargas rígidas se corresponden con las cargas reales.

- **Carga en faja infinita distribuida uniformemente.**

Para el caso de carga vertical las tensiones se obtienen por una doble integración de las fórmulas de Boussinesq. Los valores de $\frac{z}{I}$ están en la tabla 3.4.

TABLA 3.4 ($\bar{I}_z = p \cdot I_z$)

z/2a	x/2a	0.00			0.25			0.50			I_z	I_h	I_t
				I_z	I_h	I_t	I_z	I_h	I_t				
0.00		1.00	1.00	0.00	1.00	1.00	0.00	0.50	0.50	0.32			
0.25		0.96	0.45	0.00	0.90	0.30	0.13	0.50	0.35	0.30			
0.50		0.82	0.18	0.00	0.74	0.19	0.16	0.48	0.23	0.26			
0.75		0.67	0.08	0.00	0.61	0.10	0.13	0.45	0.14	0.20			
1.00		0.55	0.04	0.00	0.51	0.05	0.10	0.41	0.09	0.16			
1.25		0.46	0.02	0.00	0.44	0.03	0.07	0.37	0.06	0.12			
1.50		0.40	0.01	0.00	0.38	0.02	0.06	0.33	0.04	0.10			
1.75		0.35	0.00	0.00	0.34	0.01	0.04	0.30	0.03	0.08			
2.00		0.31	0.00	0.00	0.31	0.00	0.03	0.28	0.02	0.06			
3.00		0.21	0.00	0.00	0.21	0.00	0.02	0.20	0.01	0.03			
4.00		0.16	0.00	0.00	0.16	0.00	0.01	0.15	0.00	0.02			
5.00		0.13	0.00	0.00	0.13	0.00	0.00	0.12	0.00	0.00			
6.00		0.11	0.00	0.00	0.10	0.00	0.00	0.10	0.00	0.00			
z/2a	x/2a	1.00			1.50			2.00			I_z	I_h	I_t
				I_z	I_h	I_t	I_z	I_h	I_t				
0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00			
0.25		0.02	0.17	0.05	0.00	0.07	0.01	0.00	0.04	0.00			
0.50		0.08	0.21	0.13	0.02	0.12	0.04	0.00	0.07	0.02			
0.75		0.15	0.22	0.16	0.04	0.14	0.07	0.02	0.10	0.04			
1.00		0.19	0.15	0.16	0.007	0.14	0.10	0.03	0.13	0.05			
1.25		0.20	0.11	0.14	0.10	0.12	0.10	0.04	0.11	0.07			
1.50		0.21	0.08	0.13	0.11	0.10	0.10	0.06	0.10	0.07			
1.75		0.21	0.06	0.11	0.13	0.09	0.10	0.07	0.09	0.08			
2.00		0.2	0.05	0.10	0.13	0.07	0.10	0.08	0.08	0.08			
3.00		0.17	0.02	0.06	0.13	0.03	0.07	0.10	0.04	0.07			
4.00		0.14	0.01	0.03	0.12	0.02	0.05	0.10	0.03	0.05			
5.00		0.12	0.00	0.00	0.11	0.00	0.00	0.09	0.0	0.00			
6.00		0.10	0.00	0.00	0.10	0.00	0.00	0.09	0.00	0.00			

• **Carga circular uniforme.**

Las tensiones verticales en el centro del cálculo son:

$$\bar{I}_z = q \cdot A \cdot (1 - \cos 3 \cdot \frac{\pi}{4}) = q \cdot A \cdot I_c$$

Los valores están en la tabla 3.8.

El asiento en la vertical del centro viene dado por la expresión:

Siendo $n = z/a$. Los distintos valores se pueden obtener mediante la gráfica representada en la figura 3.43.

Bajo el centro del cálculo el asiento toma la forma más simple:

• **Carga rectangular repartida uniformemente.**

La presión correspondiente a los bordes del rectángulo será:

Siendo:

$$R_{21} = a_2 + z_2 \quad R_{22} = b_2 + z_2 \quad R_{23} = a_2 + b_2 + z_2$$

Para determinar los valores de \bar{I}_z se puede emplear también el tabaco de la figura 3.49.

Para hallar la tensión en un punto de la vertical de un punto del interior del rectángulo, hay que sumar las tensiones correspondientes a cuatro rectángulos parciales:

$$\bar{I}_z = \bar{I}_{zI} + \bar{I}_{zII} + \bar{I}_{zIII} + \bar{I}_{zVI}$$

Para hallar la tensión bajo un punto correspondiente al exterior del rectángulo, es preciso hallar primero el vértice de un rectángulo que incluyera al cargado y tenga su vértice sobre el punto considerado en planta (rectángulo I), hay que restar la tensión correspondiente a los rectángulos II y III y, finalmente,adir la correspondiente al rectángulo IV, puesto que éste se ha restado dos veces.

$$\bar{I}_z = 2 \cdot (\bar{I}_{zI} - \bar{I}_{zII})$$

Por combinaciones análogas puede resolverse cualquier caso de área cargada que pueda, exacta o aproximadamente descomponerse en rectángulos. Así pues, se puede resolver un área de forma elástica asimilando a un rectángulo que tenga el mismo área y se adapte lo mejor posible a la elipse.

El asiento correspondiente a la esquina de un rectángulo cargado, de la dos a y b, sobre un espacio de Boussinesq viene dado por la expresión:

Siendo $n = a/b$. Esta expresión se puede escribir también como:

Los valores de k pueden tomarse de la figura siguiente:

Para puntos situados en el interior, o también en el exterior del rectángulo, se pueden usar superposiciones de estados como en el caso de las tensiones. De esta manera se encuentra inmediatamente que el asiento en el interior del rectángulo es mayor que en las esquinas.

El asiento en el centro se puede comprobar que es:

• CAPA HOMOGENEA SOBRE BASE RÍGIDA.

El caso de capa elástica homogénea sobre base rígida es muy importante por su analogía con la realidad. Es muy frecuente que un estrato deformable esté limitado a cierta profundidad por una capa rígida, como roca, gravas, arenas densas, etc.

Se presentan dos casos típicos según que la interfaz entre la capa elástica y la base rígida sea lisa o rugosa. La interfaz será rugosa en aquellos casos en que los puntos de la capa elástica en contacto con la base rígida no tengan ningún tipo de desplazamiento; mientras que si la interfaz es lisa los puntos en contacto con la base rígida se desplazan libremente, $\bar{I}_z = 0$.

En ambos casos, las tensiones correspondientes están afectadas por el coeficiente de Poisson. La influencia de este coeficiente en las tensiones es mínima, aunque siendo loes para los asientos, los cuales se producen sólo en superficie. Un valor negativo de una sienta es indicativo de que el suelo se levanta, y es debido a valores altos del coeficiente de Poisson.

- **Carga aislada puntual.**

Los valores de σ_z y Isz se pueden obtener de las tablas 3.15 y 3.16, respectivamente.

- **Carga lineal.**

Los valores de σ_z y Isz se pueden obtener de las tablas 3.17.

- **Carga en faja.**

Este es el modelo que más se asemeja a una zapata corrida. Para este caso tanto las tensiones como los asientos están referidos a un punto situado en el extremo de la carga.

El valor de las tensiones se obtiene mediante la gráfica de la figura 3.73, en función de la profundidad del punto, z , la profundidad de la capa elástica, h , del ancho de la carga, B , del coeficiente de Poisson y las condiciones del interfaz.

Por su parte, los asientos se obtienen mediante la gráfica de la figura 3.75, en función de la profundidad de la capa elástica, h , del ancho de la carga, B , y del coeficiente de Poisson.

- **Carga circular.**

Mediante la gráfica 3.77 se pueden determinar las tensiones bajo el centro y el borde del círculo, para una interfaz rugosa.

La gráfica 3.78 permite conocer el asiento en el centro, según el tipo de interfaz y el coeficiente de Poisson.

- **Carga rectangular.**

3.5.1. Solución exacta.

El caso de una carga rectangular sobre una capa elástica, que se apoya en una base rígida, es de gran interés para los estudios de cimentaciones, ya que en muchas ocasiones este esquema podrá simular el caso real con gran aproximación.

El valor de las tensiones verticales σ_z bajo una esquina del rectángulo se presenta en los gráficos 3.81 a 3.85 para profundidades $z = 0.2 h, 0.4 h, 0.6 h, 0.8 h$ y $1.0 h$ en función de las distintas relaciones, longitud del rectángulo/ espesor de la capa y longitud del rectángulo/ ancho del rectángulo.

La tabulación se ha realizado para un coeficiente de Poisson $\nu = 0.4$, aunque este coeficiente tiene poca influencia sobre las tensiones verticales, sobre todo en la parte superior.

Los asientos se pueden determinar mediante el gráfico 3.86, para diferentes coeficientes de Poisson.

- **Método aproximado de Steinbrenner para el cálculo de asientos.**

Steinbrenner calculó el descenso que se produce en un punto situado a una profundidad z bajo la esquina de un rectángulo cargado. Denominando como s_z al asiento que experimentaría este punto en el caso de profundidad indefinida del terreno compresible, se puede admitir que el asiento en la esquina, para el caso de profundidad z de la capa compresible es:

$$\hat{s}_z = s_0 - s_z$$

Siendo s_0 el asiento de la superficie en el caso de profundidad indefinida.

El asiento de un punto situado a una profundidad z debajo de la esquina de un rectángulo cargado es igual a:

Donde $A = 1 - \tilde{\Gamma}_2$ y $B = 1 - \tilde{\Gamma}_1 - \tilde{\Gamma}_2$. En cuanto a las funciones $\tilde{\Gamma}_1$ y $\tilde{\Gamma}_2$ vienen dadas por las expresiones:

Siendo y . Los valores de $\tilde{\Gamma}_1$ y $\tilde{\Gamma}_2$ están tabulados en la tabla 3.19.

Ejemplo

$$s = sI + sII + sIII + sIV$$

$$s = \hat{I} s1 + \hat{I} s2 + \hat{I} s3$$

$$s = (s_0 - s1)1 + (s1 - s2)2 + (s3)3$$

$$s = (0.038 - 0.022) + (0.001 - 0.001) + (0) = 0.016 \text{ m}$$

Ejemplo

$$s = 4 A \cdot sI$$

$$s = 4 A \cdot (\hat{I} s1 + \hat{I} s2)$$

$$s = 4 A \cdot [(s_0 - s1)1 + (s1 - s2)2]$$

$$s = 4 A \cdot [(0.011 - 0.005) + (0)] = 0.024 \text{ m}$$

La diferencia entre los asientos en la superficie y la profundidad z , calculados por la tabla 3.19, darán aproximadamente el asiento producido por la capa compresible. Steinbrenner hizo la operación de sustitución entre ambos valores en la expresión:

Siendo f_1 y f_2 funciones que se hallan en el Anexo del gráfico 3.90, y A y B los mismos coeficientes que se han visto con anterioridad.

Para el terreno incompresible, es decir, para $\tilde{\Gamma} = 1/2$, la expresión anterior se simplifica como:

En el caso de que se desconozca el valor exacto del coeficiente de Poisson se suele tomar un valor de $\tilde{\Gamma} = 1/3$, con lo cual el asiento queda en función de F , que se obtiene a partir de la tabla 3.91.

En el caso de haber varias capas de diversa compresibilidad, resulta necesario efectuar el cálculo para distintas profundidades, con los coeficientes de elasticidad correspondientes, sucesivamente, a cada una de las capas. Por diferencia podrá hallarse el asiento debido a estas, y con ello el asiento total de la superficie.

- **SEMIESPACIO ELÁSTICO HETEROGRÁNEO.**
- **Introducción.**

El modelo de suelo heterogéneo más simple que se puede proponer es el de un semiespacio elástico infinito, en que el módulo de Young E varía linealmente con la profundidad z según la expresión:

$$E_T = E_0 + \hat{I} A \cdot z$$

Dos casos lámite se presentan, segundón sean 0 el gradiente \hat{I} , o el módulo inicial E_0 .

El primer caso ($\hat{I} = 0$) conduce al semiespacio homogéneo ya estudiado anteriormente. El segundo caso representa un modelo, en principio poco realista, ya que da un módulo de elasticidad nulo en superficie.

Gibson estudió³ con detalle este modelo, también llamado modelo del coeficiente de balasto, con resultados interesantes.

Se considera un círculo de radio R cargado uniformemente con una presión q , sobre un semiespacio F en que el módulo de elasticidad varía según la ley:

$$E = \hat{I} \cdot A \cdot z$$

Se supone un coeficiente de Poisson $\frac{1}{2} = 0.5$. el asiento en el centro S_0 dependerá de los parámetros que definen el problema, que son R , \hat{I} y q (si el asiento no fuera en el centro dependería de otros parámetros). Según el teorema de Buckingham, se debe poder establecer una relación adimensional del tipo:

Como el material es elástico, su respuesta a la carga será lineal, es decir, que el asiento será proporcional a la carga:

â

Ecuación en la que se comprueba que el asiento no depende del radio de la carga.

Puesto que el módulo de Young y el coeficiente de Poisson no varían en dirección horizontal, se puede aplicar el principio de superposición de cargas colocadas en la superficie del semiespacio.

Sea un círculo de radio R_1 cargado uniformemente con una presión q , el asiento bajo el centro será:

Si se le superpone un área cargada con una presión uniforme - q , dispuesta en un círculo de radio $R_2 < R_1$, concéntrico con el anterior, el asiento en el centro será ahora:

Es decir, que el asiento en el centro de una corona circular cargada uniformemente es siempre nulo.

Si se divide la corona circular en n sectores, el asiento total S_0 , por el mismo principio de la superposición será la suma de los asientos debidos a los distintos sectores. Así -:

$$S_0 = n \cdot A \cdot (\hat{I} \cdot S_0)$$

Como el asiento total S_0 es cero, el asiento debido a un sector $\hat{I} \cdot S_0 = 0$.

El asiento en un punto O exterior a un área cargada uniformemente es nulo. En cambio, si el punto se encuentra dentro de área cargada, el asiento será:

En resumen, se puede afirmar que, este modelo elástico heterogéneo conduce a que el asiento fuera de la carga es nulo, y bajo la carga da un asiento proporcional a la misma, con un módulo de reacción $K = \hat{I}/A$, si se define el módulo de reacción por la ecuación:

$$\text{Si } \hat{I} = 1/2 \quad A = 3/2 \quad K = (2/3) \hat{I}$$

$$\text{Si } \hat{I} = 1/2 \quad A = 1/2 \quad K = 1/2$$

- **Carga circular.**

La ley de variación del módulo de rigidez transversal se expresa como en el caso anterior por:

El asiento en el centro del círculo puede expresarse por:

Siendo p la carga a que está sometida el área circular, a el radio del círculo e I el coeficiente de influencia definido en la gráfica 3.100.

El asiento en superficie para distintos coeficientes de Poisson viene recogido en la gráfica 3.101.

- **Carga rectangular.**

La ley de variación de la deformabilidad, referida al módulo de Young es:

El asiento bajo la esquina del rectángulo viene recogido en la gráfica 3.103, en función del coeficiente de influencia:

Ejemplo

$$l^2 = 10 \text{ m}$$

$$q = 100 \text{ kPa}$$

$$\bar{\nu} = 1/3$$

$$E_0 = 104 \text{ kPa}$$

$$S_0 = 4 \cdot S_c$$

$$\hat{a} \quad \hat{a}$$

$$S_0 = 0.0263 \text{ m}$$

En el caso de una carga rectangular sobre una capa elástica con heterogeneidad lineal apoyada en una base rígida se puede extraer el módulo de Steinbrenner, considerando un sistema multicapa en que los módulos de elasticidad de las distintas capas varían linealmente con la profundidad.

Con ello, el asiento en la esquina del rectángulo, para diversas formas del rectángulo y coeficientes de Poisson, se recoge en la gráfica 3.105.

Ejemplo

$$q = 100 \text{ kPa}$$

$$\nu = 0.5$$

$$\bar{\nu} = 1/2$$

$$E_0 = 104 \text{ kPa}$$

$$S_0 = 4 \cdot S_c$$

â ª

$S_0 = 0.008 \text{ m}$

- **CARGAS RÂGIDAS SOBRE EL SEMIESPACIO ELÂSTICO HOMOGÂNEO.**

En los casos en que las fuerzas se aplican a travÃos de cimentaciones de mayor o menor rigidez, las acciones reciprocas del terreno y de la cimentaciÃn conducen a una distribuciÃn de las presiones en la cara de contacto, que debe cumplir la condiciÃn de compatibilidad de deformaciones entre uno y otro elemento, y que, a su vez, depende de sus caracterÃsticas de deformabilidad. Es por ello, que de forma general, no puede determinarse de un modo inmediato, sino a travÃos del cÃlculo de las deformaciones de uno y otro.

Si sobre el semiespacio de Boussinesq se coloca un bloque absolutamente rÃgido de planta circular y se aplica una fuerza, todos los puntos situados bajo el bloque sufrirÃn el mismo asiento, obligados por la rigidez del bloque, de modo que la presiÃn en la cara de contacto no puede ser uniforme, sino que ha de ser mayor en los bordes. Esta soluciÃn teÃrica no puede ser real, puesto que no existe un terreno capaz de resistir una presiÃn infinita en ninguno de sus puntos.

- **Carga en faja.**

El giro producido por un momento M vale:

Este modelo sÃolo es vÃjido para cargas con una excentricidad menor a la mitad del lado de la zapata: $e < a/2$.

- **Placa circular.**

El asiento del cÃrculo es:

$$P = p \cdot I \cdot A \cdot a$$

Siendo a el radio del cÃrculo.

El giro es en este caso de excentricidad $pequeÃ±a$:

$$e \approx a/3$$

- **Placa rectangular.**

El asiento se obtiene a partir del grÃfico 3.122, tomando como a el lado mayor del rectÃngulo.

El giro se obtiene a partir del grÃfico 3.123, tomando como b el lado perpendicular al eje del momento.

Tema 13: EL SÃLIDO ELÂSTICO

1

13

MECÃNICA DEL SUELO