Apuntes

de

LÃ-neas

y

Ã ngulos

a trazar

en

DIEDRICO

Para ejercicios de la serie D

(SINTESIS)

INDICE

0.− **Ã ngulo** de dos **rectas r** y **s** que **se cruzan** (no se cortan) **en el espacio**.

1.− **Ã ngulo** que forma una **recta r** con un **plano P**.

2.− **Ã ngulo** diedro que forman dos **planos P** y **Q.**

3.− **Recta** que pasa por un **punto A** y forma un **Ã¡ngulo Ã¢** con otra **recta s**.

4.− **Recta** que pasa por un **punto A** y forma un **Ã¡ngulo Ã¢** con **plano P**

5.− **Recta** que pasa por un **punto A** forma un Ã¡ngulo Ã¢ con un **plano P** y un **Ã¡ngulo b** con un **plano Q**.

6.− **Recta** que pasa por **un punto A**, forma un **Ã¡ngulo Ã¢** con un **plano P** y un **Ã¡ngulo b** con una **recta**

7.− **Recta** que pasa por un **punto A**, forma un Ã¡ngulo Ã¢ y b con dos recta **s** y **t**, respectivamente.

8.− **Plano** que pasa por un **punto A** y forma un **Ã¡ngulo Ã¢** con una **recta r**

9.− Plano que pasa por un **punto A** y forma un **Ã¡ngulo Ã¢** con un **plano P**

10.− **Plano** que pasa por un **punto A** y forma **Ã¡ngulos aÂº** y **bÂº** con dos **rectas r** y **s**, respectivamente.

11.− **Plano** que pasa por un **punto A** y forma un **Ã¡ngulo aÂº** con una **recta r** y un **Ã¡ngulo bÂº** con un **plano Q.**

12.− **Plano** que pasa por un **punto A** y forma **Ã¡ngulos aÂº y b**Âº con dos **planos P** y **Q**, respectivamente.

13.− **Plano** que pasa por un **punto A** y forma **Ã¡ngulos aÂº** con el **plano horizontal PH** y **bÂº** con el **plano vertical PV**, respectivamente. **AplicaciÃ³n: a = 45Âº; b = 75Âº.**

13.1− **MÃ©todo clÃ¡sico.**

13.2− **MÃ©todo actual.**

14.− **Plano** que pasa por una **recta r** y forma un **Ã¡ngulo aÂº** con un **plano Q.**

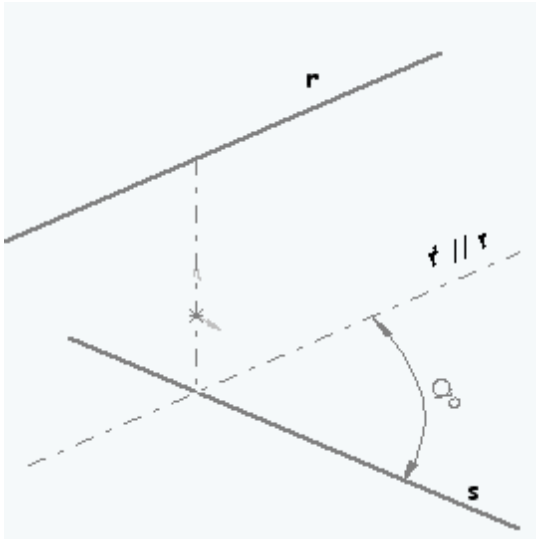
15.− **Plano** que pasa por una recta r y forme un **Ã¡ngulo aÂº** con la **recta s**.

Anexo:

LÃ-nea de mÃ¡xima pendiente de un **plano Q**, y que pasa por un **punto A**, respecto de otro **plano P**, formando un Ã¡ngulo **aÂº** con una **recta**

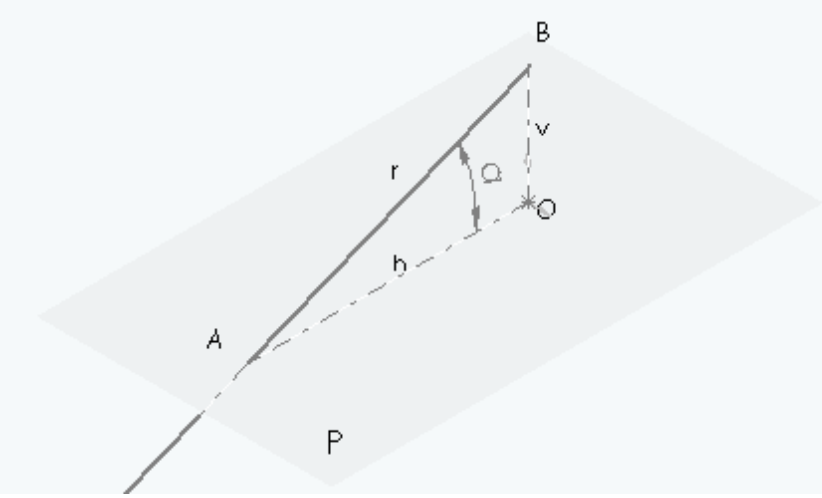
0.− <u>Ã ngulo de dos rectas r y s que se cruzan (no se cortan) en el espacio.</u>

Se traza una perpendicular comÃºn a ellas, y por el punto de interseccIÃ³n de una de ellas (**s**), se traza una paralela **r'** a **r**. El Ã¡ngulo entre dos rectas **r'^s = aÂº**, es la soluciÃ³n.



1.− <u>Ã ngulo que forma una recta r con un plano P.</u>

Por un punto cualquiera **B**, de la recta, se traza una perpendicular **<u>BO</u>**. Por el punto **A** interseccIÃ³n de la recta **r** con el plano **P** se traza la recta **<u>AO,</u>** horizontal del plano **P**. El Ã¡ngulo soluciÃ³n es el que forman **<u>AO</u>** con **<u>r</u> (=Ã¢).**



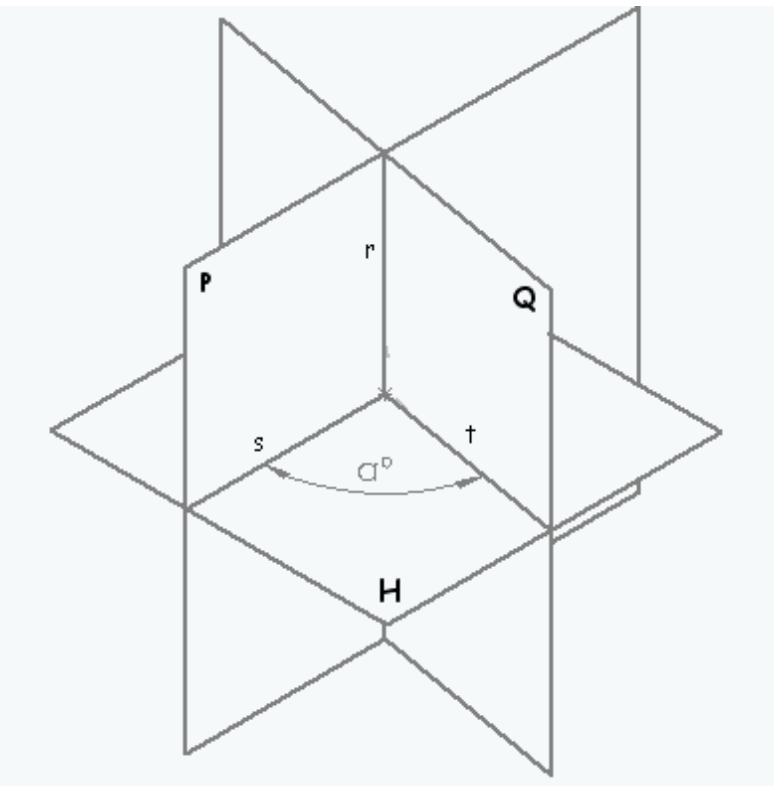
2.− <u>Ã ngulo diedro que forman dos planos P y Q.</u>

Se determina la recta **<u>r</u>** interseccIÃ³n de los planos **P** y **Q** (con la funciÃ³n: **eje de referencia)** (dos planos) y por un punto cualquiera de esta recta (eje) **<u>r</u>** se trazan:

− en el plano **P** una perpendicular **<u>s</u>** a dicho eje **<u>r</u>**

− en el plano **Q** una perpendicular **<u>t</u>** a dicho eje **<u>r</u>**

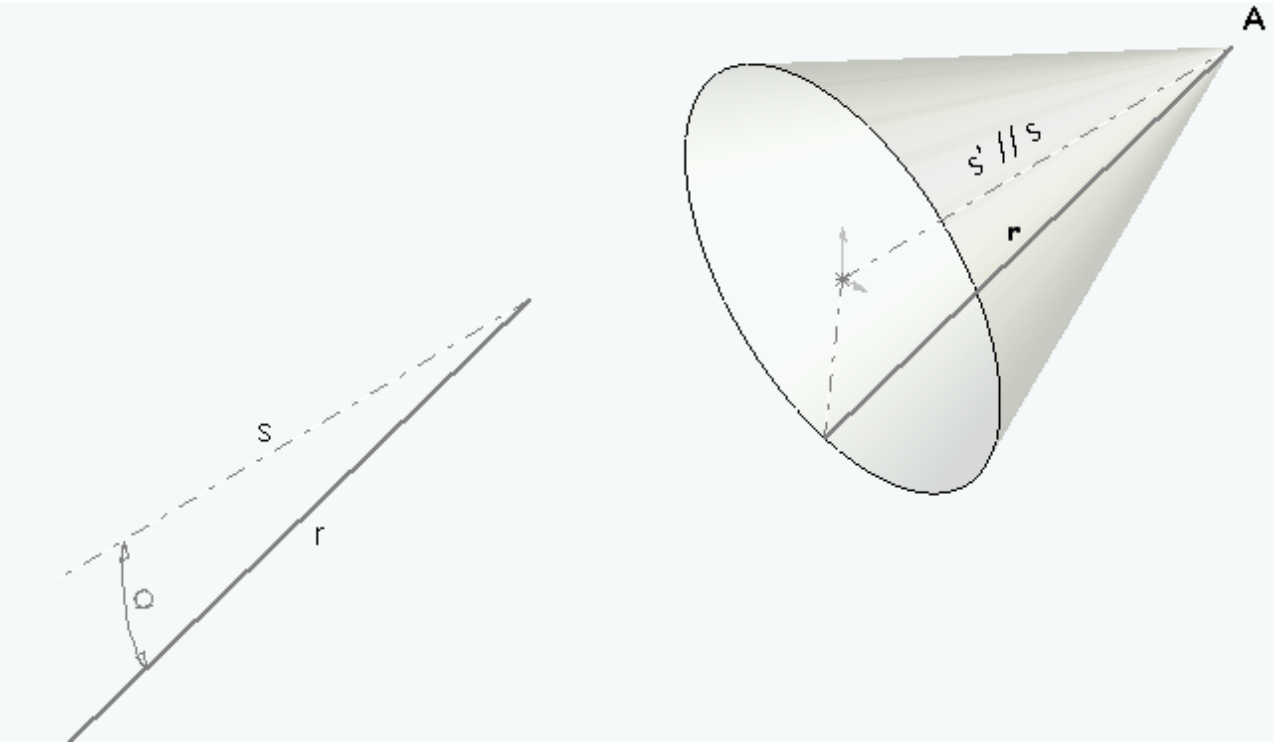
El Ã¡ngulo <u>Ã¢</u> que forman estas rectas **<u>s</u>** y **<u>t</u>**, es la soluciÃ³n buscada



3.− <u>Recta</u> <u>r que pasa por un punto A y forma un Ã¡ngulo Ã¢ con otra recta</u> <u>s</u>.

Las rectas soluciÃ³n **r** son las generatrices de un cono de revoluciÃ³n de vÃ©rtice **A**, eje paralelo a la recta **s** y semiÃ¡ngulo cÃ³nico = **Ã¢**. Para ello:

Se traza por **A** una recta **s'**paralela a **s** como eje del cono soluciÃ³n, y otra **r** que forme un Ã¡ngulo **Ã¢** con ella, como generatriz de un cono. Por la recta **r**, y un punto cualquiera del eje, trazamos un plano auxiliar y en este plano se construye el cono soluciÃ³n (croquis en 2D: eje = lÃ-nea constructiva y generatriz = lÃ-nea). La generatriz del cono es cualquiera. (longitud no definida)



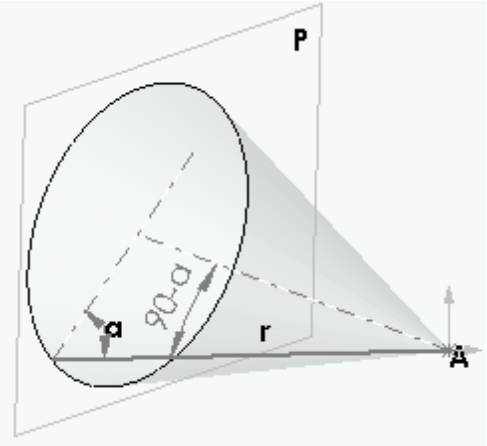
4.− Recta que pasa por un punto A y forma un Ã¡ngulo Ã¢ con plano P

Las rectas soluciÃ³n son las generatrices de un cono de eje trazado por A normal al plano P, y semiÃ¡ngulo cÃ³nico = **90−Ã¢**. Para ello:

Se traza por A una lÃ-nea perpendicular al plano, punto final en plano **P**; serÃ¡ el eje del cono.

Por A recta **r** hasta plano P que forme **90−a** con el eje del cono.

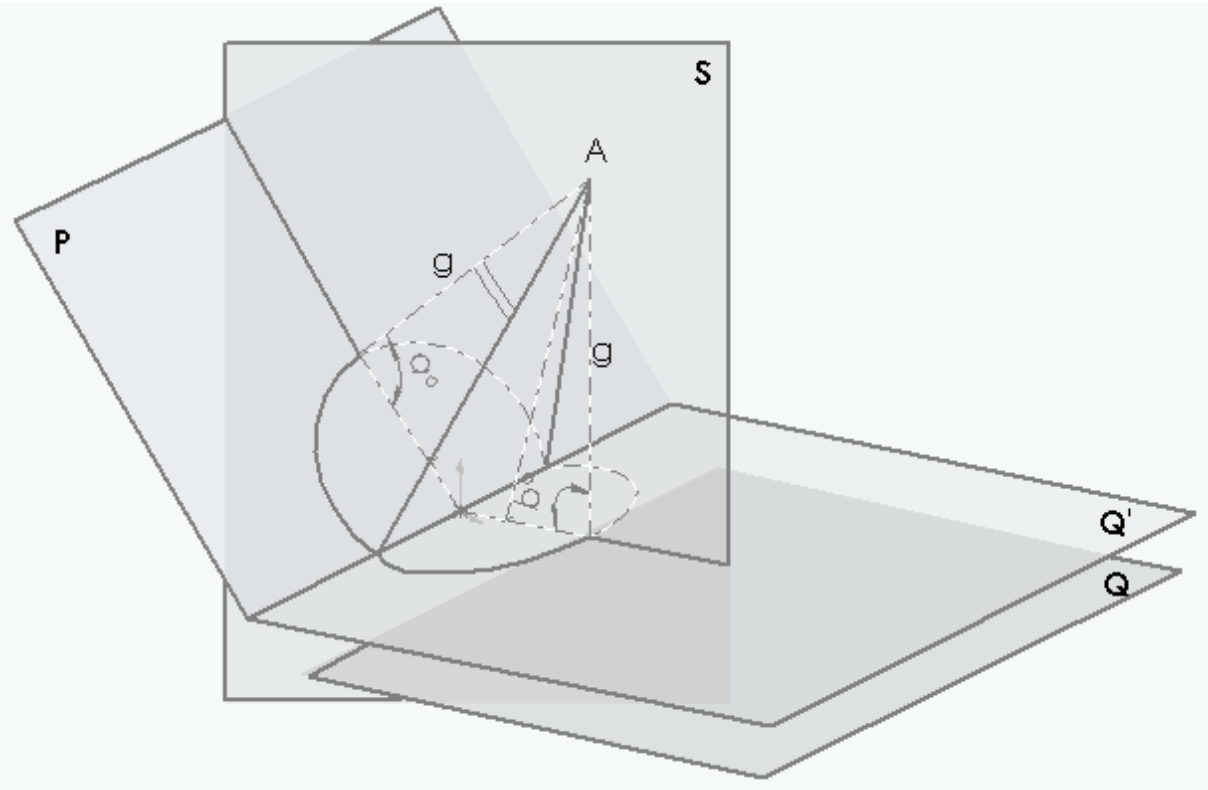
Por este eje del cono y punto final de **r** en P, se traza plano auxiliar, en el que se construye el cono soluciÃ³n.



5.− Recta que pasa por un punto A forma un Ã¡ngulo Ã¢ con un plano P y un Ã¡ngulo b con un plano Q.

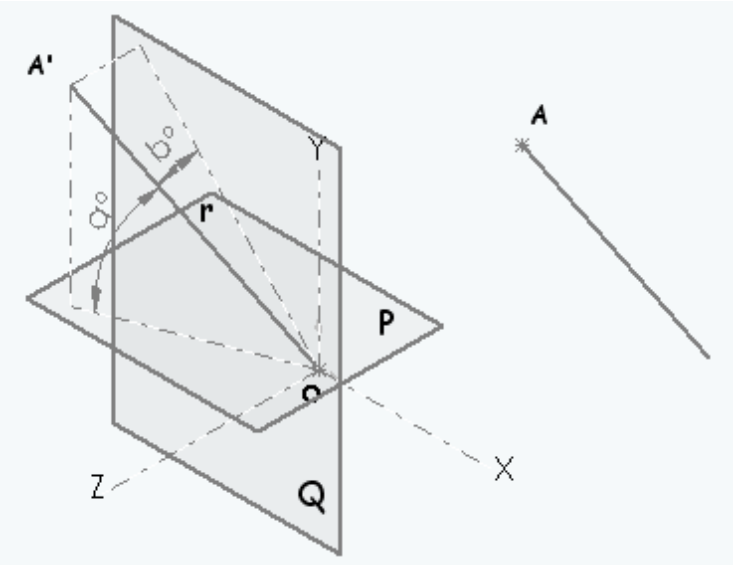
Por el punto dado A se traza un plano **S** perpendicular a la recta intersecciÃ³n de los planos P y Q, dados. Por A se trazan ejes perpendiculares a los planos P y Q respectivamente y rectas que formen Ã¡ngulos **90Âº−a** y **90Âº−b** con estos ejes, respectivamente. Estas rectas nos generan dos conos cuyas generatrices comunes son la soluciÃ³n.

ObservaciÃ³n: Los conos se consideran con las generatrices **g** iguales, para lo cual, si es necesario, se traza un plano paralelo a P Ã³ Q, donde sea necesario. Ver croquis de soluciÃ³n.



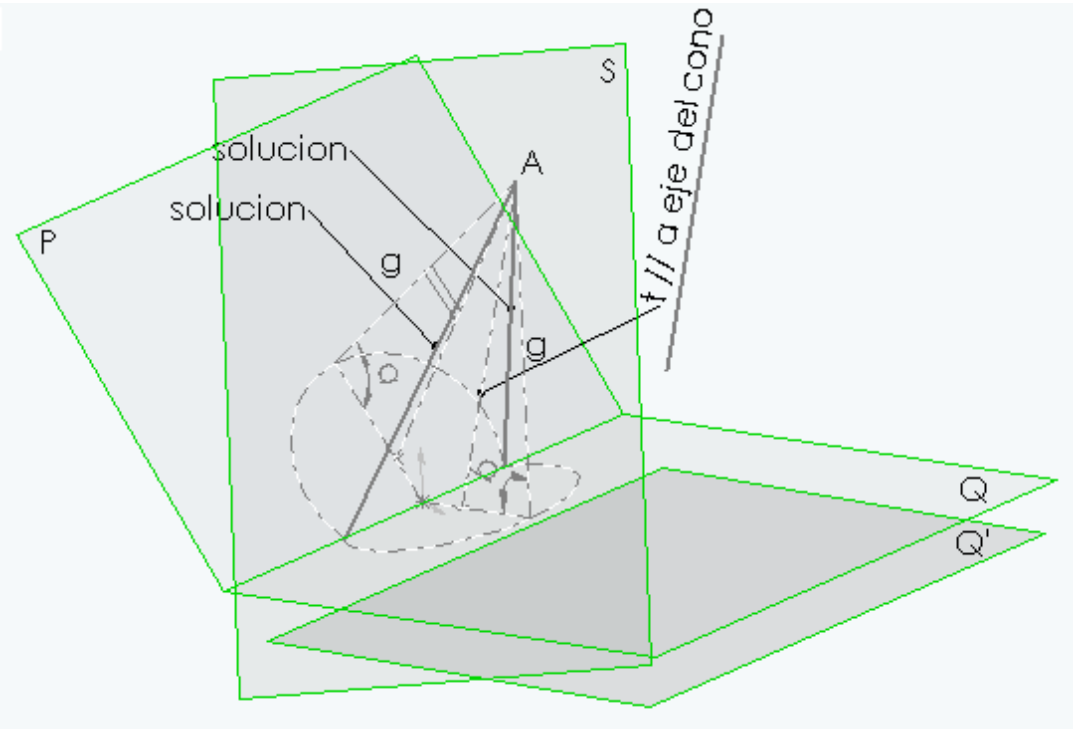
5.1−Otro mÃ©todo mÃ¡s rÃ¡pido: Por el centro de coordenadas trazamos una recta **OA'=r,** por el extremo **A',** se trazan normales a los planos P(PH) y Q(PV) respectivamente, se unen los extremos de estas rectas, en cada plano, con el origen O, y se dan valores a los Ã¡ngulos **OA'^P(PH) = aÂº** y **OA'^Q(PV) = bÂº**. que nos definen la recta OA'. Si queremos que pase por **A** basta trazar una recta paralela por A. y tendremos la recta soluciÃ³n.

ObservaciÃ³n: Hay cuatro posibles soluciones (simÃ©tricas dos a dos), por lo que es necesario ver en que cuadrante nos conviene posicionar la recta.



6.− Recta que pasa por un punto A, forma un Ã¡ngulo Ã¢ con un plano P y un Ã¡ngulo b con una recta t.

Igual que el caso anterior, cambiando simplemente la recta por un plano perpendicular a ella.

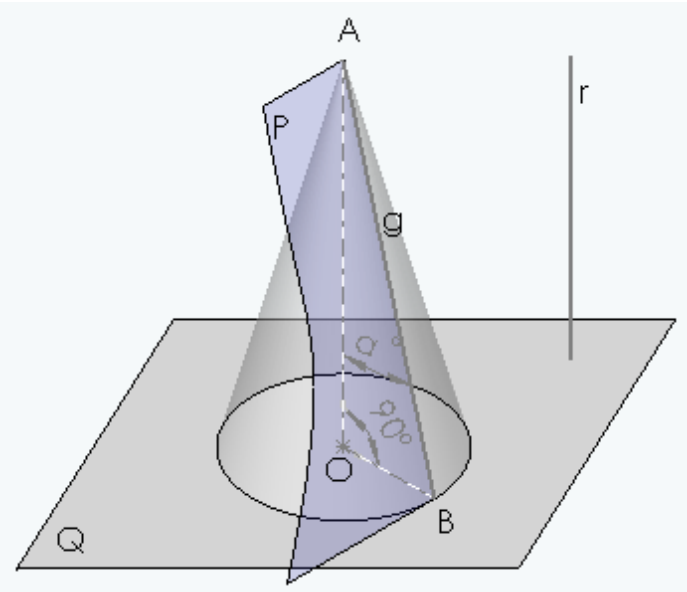


7.− Recta que pasa por un punto A, forma un Ã¡ngulo Ã¢ y b con dos recta s y t, respectivamente.

Como en los casos anteriores, cambiando las rectas por planos es decir: trazando simplemente un plano S perpendicular a la recta s y un plano T perpendicular a recta t respectivamente.

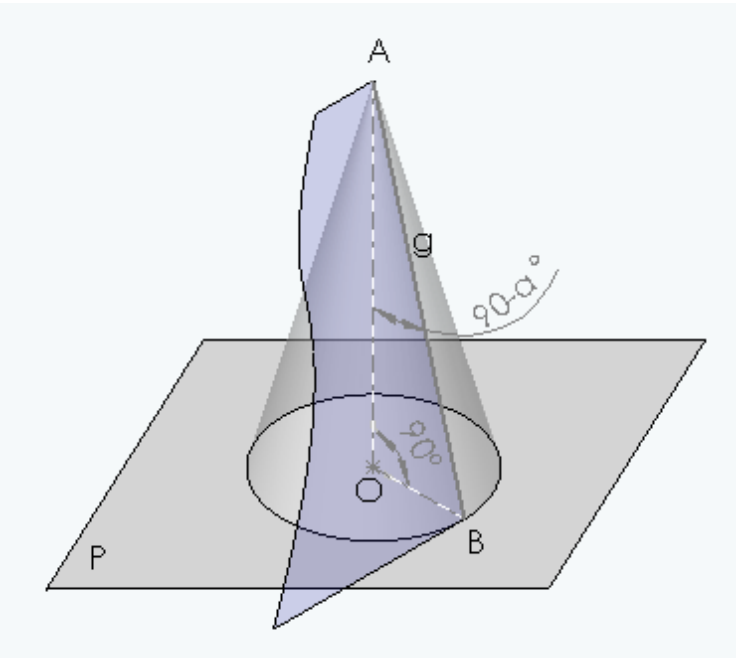
8.− Plano que pasa por un punto A y forma un Ã¡ngulo Ã¢ con una recta r.

Por **A** trazamos una recta paralela a la recta **r** (que harÃ¡ de eje) y un plano perpendicular a ella como plano base. Una recta por **A** que forme con la recta **r** un Ã¡ngulo **aÂº** nos define el cono de semiÃ¡ngulo cÃ³nico **aÂº.** Los planos buscados serÃ¡n tangentes a este cono.



9.− <u>Plano que pasa por un punto A y forma un Ã¡ngulo Ã¢ con un plano P</u>

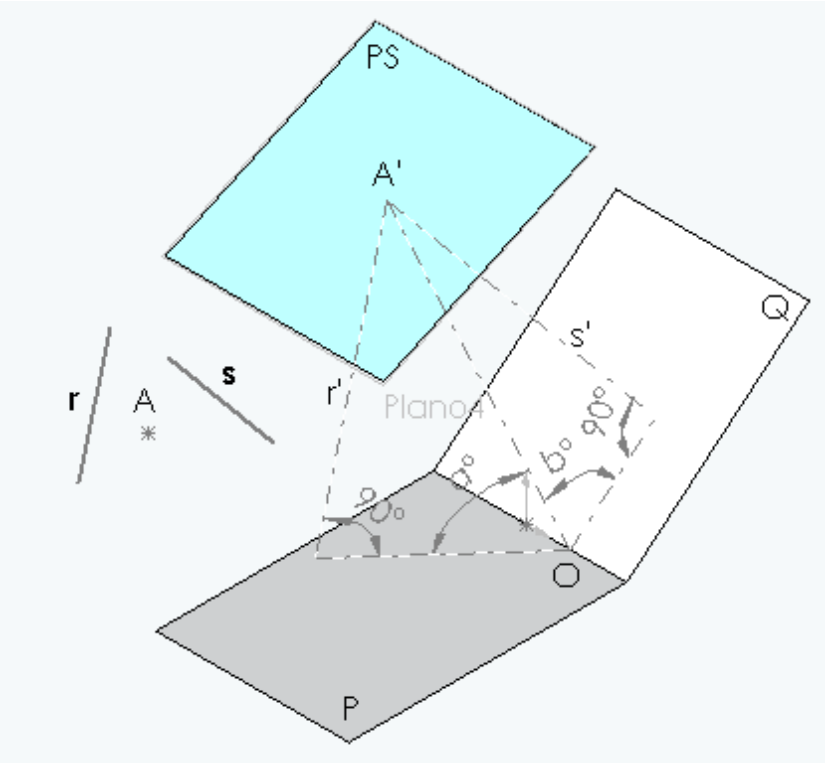
Por **A** trazamos una recta (que harÃ¡ de eje) perpendicular al plano **P.** Una recta por **A** que forme con ella un Ã¡ngulo **90Âº−aÂº** nos define el cono de semiÃ¡ngulo cÃ³nico **90−a**. Los planos tangentes a este cono serÃ¡n los planos soluciÃ³n buscados.



10.− <u>Plano que pasa por un punto A y forma Ã¡ngulos aÂº y bÂº con dos rectas r y s, respectivamente.</u>

Se trazan dos planos **P** y **Q** perpendiculares a las rectas **r** y **s** respectivamente. Si las rectas r y **s** no se cortan se trazan paralelas a ellas **r'** y **s'** por un punto **A'** y desde **A'** se traza una perpendicular al eje de corte de lo planos **P** y **Q** respectivamente. Se mide el Ã¡ngulo **A'O^r' = aÂº** y **A'O^s' = bÂº,** y por el extremo **A'** de

A'O se traza un plano **PS** perpendicular ala recta **A'O** que es el plano soluciÃ³n. El plano definitivo serÃ¡ paralelo trazado por **A**.

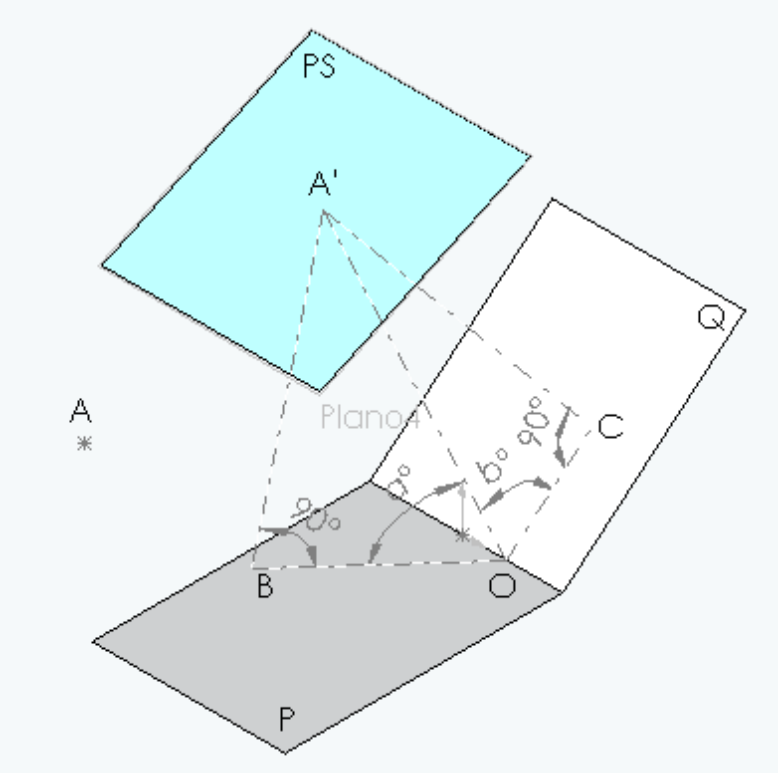


11.− <u>Plano que pasa por un punto A y forma un Ã¡ngulo aÂº con una recta r y un Ã¡ngulo bÂº con un plano Q.</u>

Estamos en el caso anterior, simplemente cambiando la recta **r** por un plano **P** perpendicular la recta **r.**

12.− <u>Plano que pasa por un punto A y forma Ã¡ngulos aÂº y bÂº con dos planos P y Q, respectivamente.</u>

Por un punto **A'** se traza una perpendicular al eje de corte de lo planos **P** y **Q** respectivamente. Se mide el Ã¡ngulo **A'O^r' = aÂº** y **A'O^s' = bÂº,** y por el extremo **A'** de **OA'** se traza un plano **PS** perpendicular a **OA'** que es el plano soluciÃ³n. El plano definitivo serÃ¡ uno paralelo trazado por **A**.

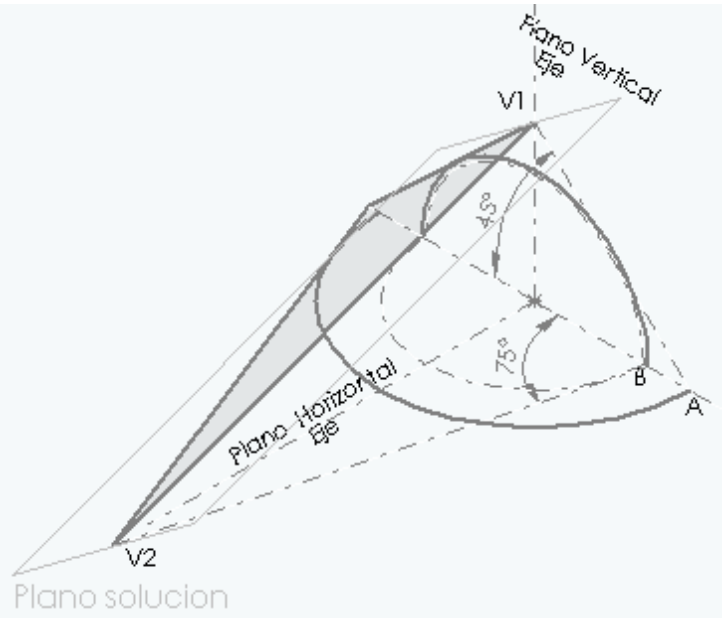


13.− <u>Plano que pasa por un punto A y forma Ã¡ngulos a(=45Âº) con el plano horizontal PH y b(=75Âº) con el plano vertical PV, respectivamente.</u>

13.1− **MÃ©todo clÃ¡sico**: En el plano vertical **PV** (o de perfil) se traza una semicircunferencia cualquiera y una recta tangente a ella que forme **a**Âº(=45Âº) con el plano horizontal PH. Esta recta corta al eje vertical en un punto V1 vÃ©rtice del cono de semiabertura = **(90−a)Âº** y generatriz V1A. Se traza la circunferencia base del cono, en el plano horizontal PH.

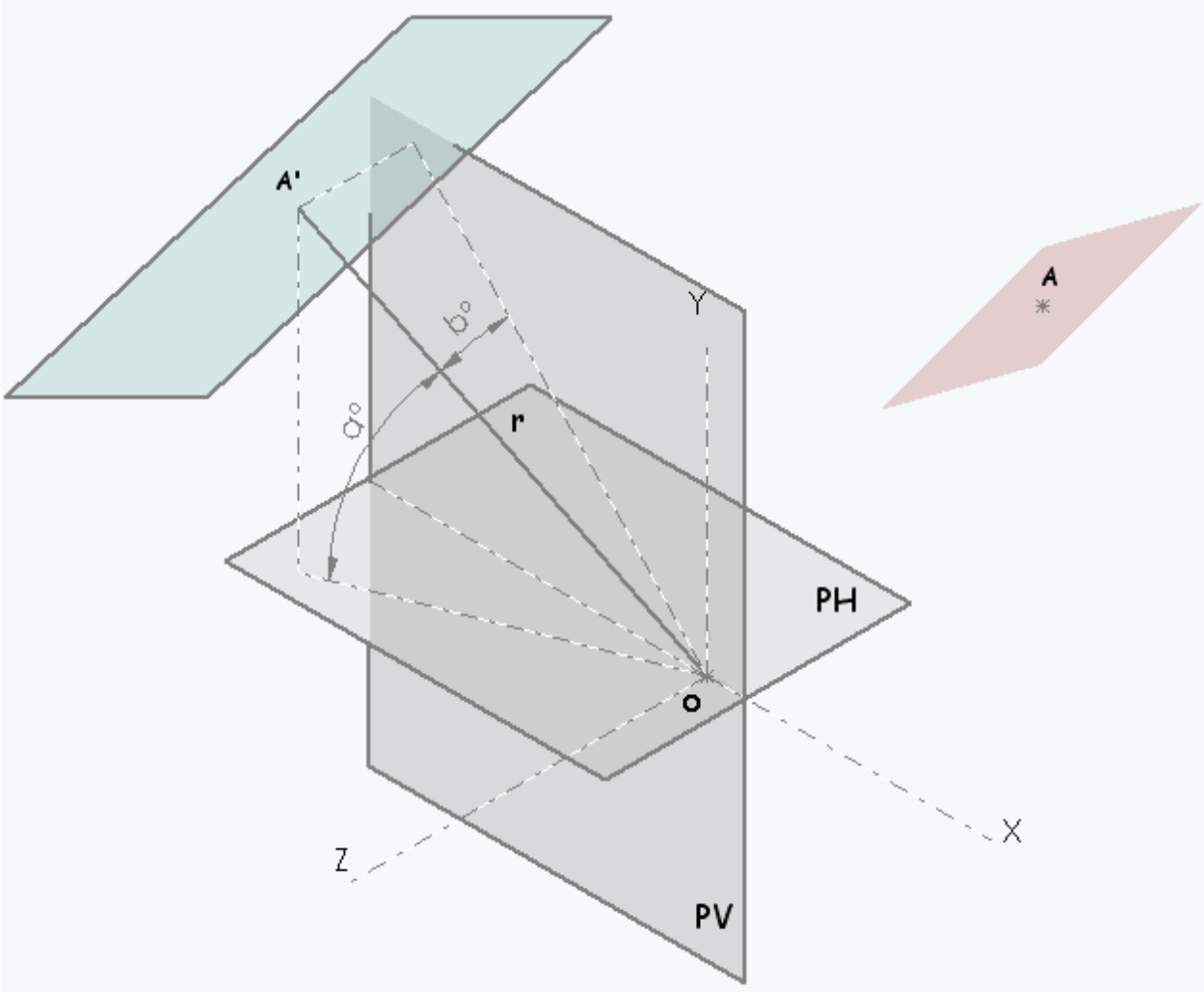
En el plano horizontal PH, se traza la misma semicircunferencia, y una recta tangente a ella que forme **bÂº** (=75Âº) con el plano vertical PV. Esta recta corta al eje horizontal en V2, vÃ©rtice del cono de semiabertura = **(90−b)Âº** y generatriz **V2B**. Se traza la circunferencia base del cono en el plano vertical PV.

Uniendo V1 con V2, y trazando las tangentes desde V1 a base del cono de vÃ©rtice V2 y desde V2 tangente al cono de vÃ©rtice V1 tenemos dos de los cuatro planos soluciÃ³n. Paralelo a estos planos por **A** tenemos dos soluciones. Ver figura siguiente.



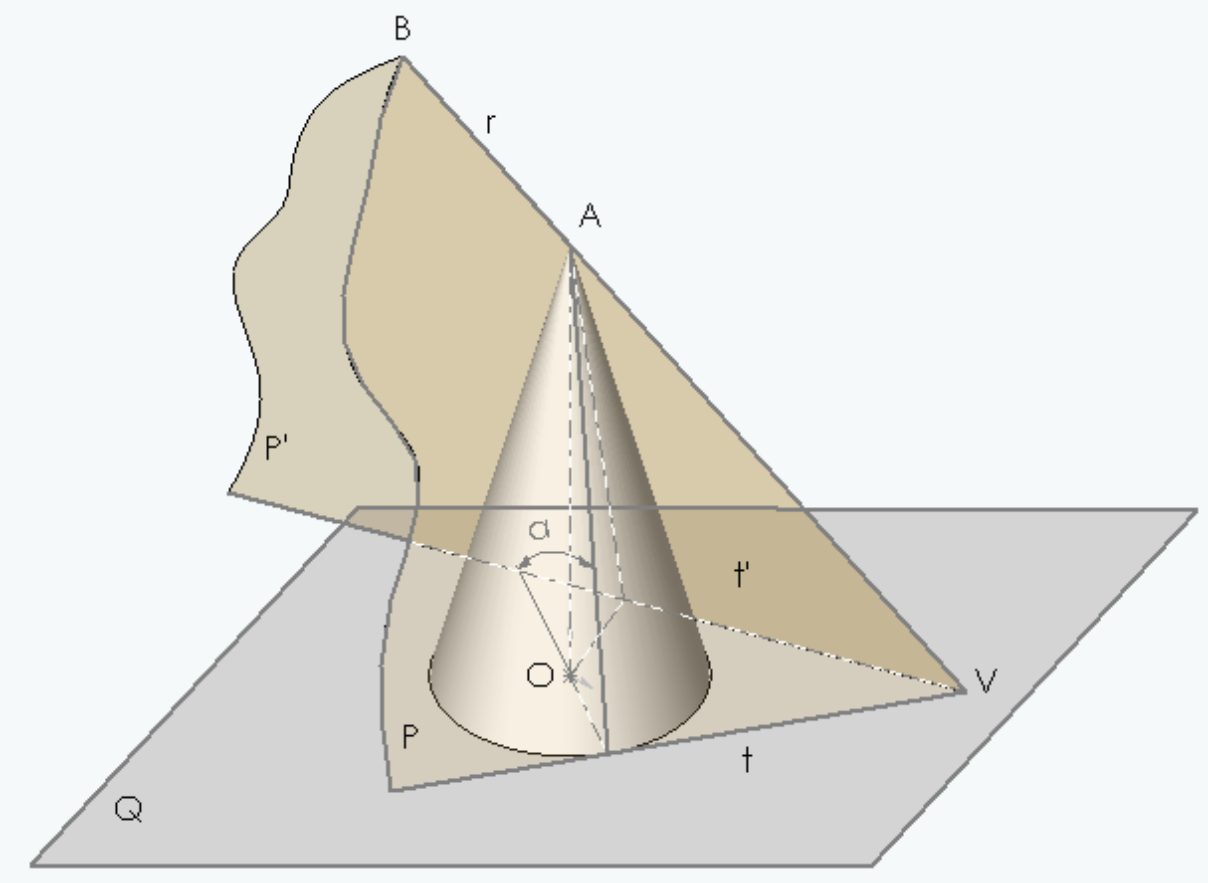
13.2−MÃ©todo actual: Por el centro de coordenadas trazamos una recta **OA'=r,**por el extremo **A',**se trazan normales a los planos **PV** y **PH** respectivamente, se unen los extremos de estas rectas, en cada plano, con el origen **O**, y se dan valores a los Ã¡ngulos **OA'^PH = aÂº** y **OA'^PV = bÂº**. que nos definen la recta **OA**'. Por el extremo **A'** trazamos un plano perpendicular a **OA'** y tenemos la posiciÃ³n del plano pedido. Si queremos que pase por **A'** basta trazar un plano que cumpla la funciÃ³n: **plano por un punto normal a la curva OA'**, y tendremos el plano soluciÃ³n.

ObservaciÃ³n: Hay cuatro posibles soluciones (simÃ©tricas dos a dos), por lo que es necesario ver en que cuadrante nos conviene posicionar la recta.



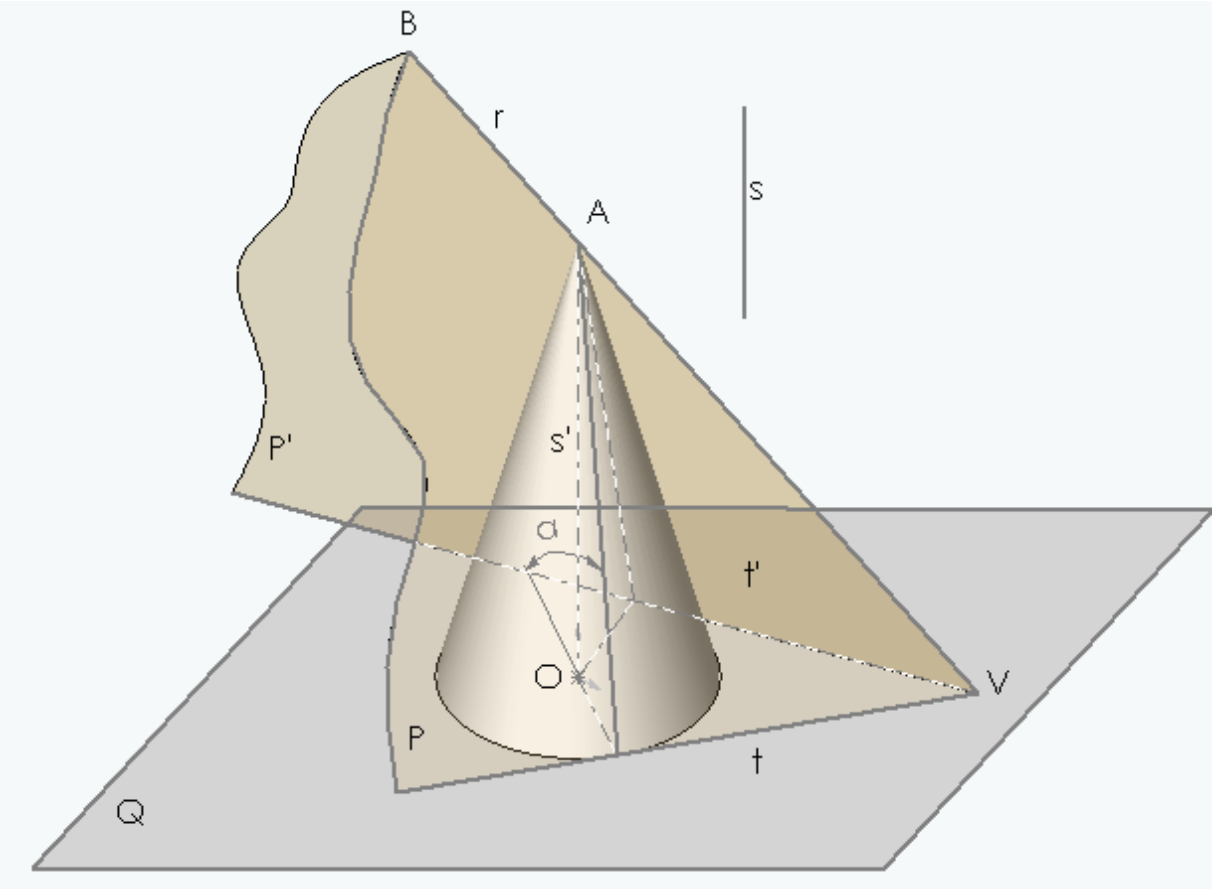
14.− Plano que pasa por una recta r y forma un Ã¡ngulo aÂº con un plano Q.

Por un punto **A** de la recta **r** trazamos una recta perpendicular **AO** hasta el plano **Q**. Por **A** trazamos otra recta que forme con la **AO** un Ã¡ngulo de **90−aÂº;** y en el plano **Q** con centro en **O**, trazamos la circunferencia base del cono, de radio **OC** (C punto de encuentro de recta que forma **90−aÂº** con la perpendicular **AO**). Prolongamos la recta **r** hasta el plano **Q** y desde el punto de encuentro **V** se trazan las tangentes **t** y **t'** a la base del cono. Los planos definidos por las tangentes **t, t'** y el punto **A** (vÃ©rtice del cono) nos definen los dos planos **P** y **P'** soluciones.



15.− Plano que pasa por una recta r y forme un Ã¡ngulo aÂº con la recta s.

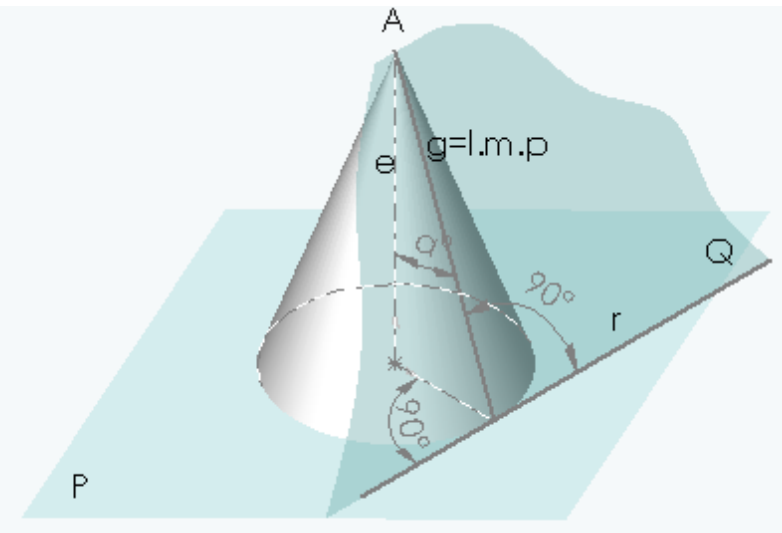
Por un punto cualquiera de la recta **r**, trazamos una recta **s' = AO** paralela a **s** hasta el punto **O**. Por **O** trazamos un plano **Q** perpendicular a la recta **OA**, y estamos en el caso explicado en el apartado anterior.



Anexo:

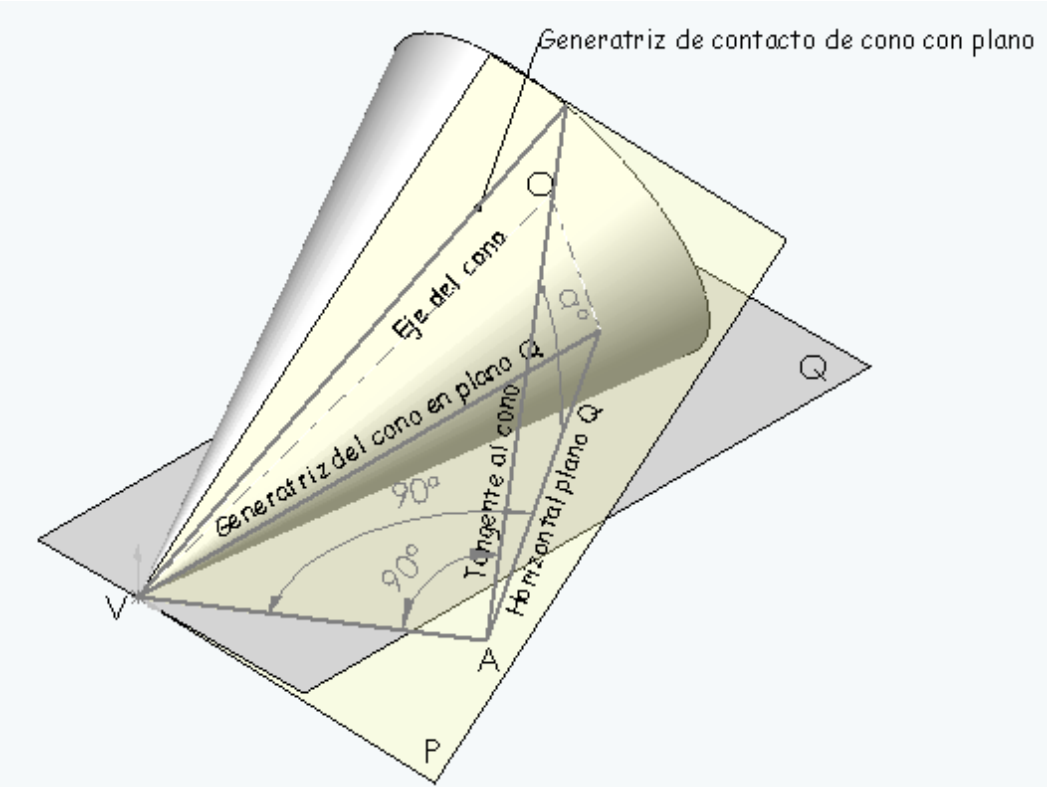
<u>LÃ-nea de mÃ¡xima pendiente de un plano Q, y que pasa por un punto A, respecto de otro plano P, formando un Ã¡ngulo aÂº con una recta e</u>.

La lÃ-nea **g** de mÃ¡xima pendiente de un plano **Q**, respecto de otro plano **P**, y que pase por un punto **A** formando un Ã¡ngulo **aÂº** con otra recta **e,** viene definida por la generatriz **g** del cono de semiÃ¡ngulo **aÂº**..



<u>Plano P tangente a un cono dado apoyado en el plano Q, que forme un Ã¡ngulo aÂº con dicho plano Q.</u>

Por un punto cualquiera A se traza una horizontal hasta la generatriz mas baja del cono, y una recta por A tangente al cono. A estas dos rectas se les impone el Ã¡ngulo aÂº, y se une A con V (vÃ©rtice del cono) y se hacen perpendiculares a VA. El plano formado por la tangente al cono y el vÃ©rtice V nos dan el plano soluciÃ³n.



3