

Equacions de rectes i plans

1.1. La recta

Una mateixa recta té diferents maneres d'expressar-se, cada una de les quals rep un nom específic. En tots aquests noms apareix la paraula **equació**.

L'**equació d'una recta** és la relació que han de verificar les coordenades (x, y, z) de tots i cadascun dels punts de la recta.

- Equació vectorial

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (u_1, u_2, u_3)$$

- Equacions paramètriques

$$x = x_0 + u_1$$

$$y = y_0 + u_2$$

$$z = z_0 + u_3$$

- Equacions contínues

$$(x - x_0) / u_1 = (y - y_0) / u_2 = (z - z_0) / u_3$$

Si algun dels components del vector director de la recta és zero, no es poden escriure les equacions contínues, ja que implica expressions amb denominador zero.

1.2. El pla

Per determinar-lo necessitem dos vectors linealment independents; tres punts no alineats determinen un pla.

- equació vectorial

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{u} + \vec{v}$$

Aquesta equació coincideix amb la del conjunt solució d'un sistema amb tres incògnites compatible, i indeterminat amb dos graus de llibertat.

- equacions paramètriques

$$x = x_0 + u_1 + v_1$$

$$y = y_0 + u_2 + v_2$$

$$z = z_0 + u_3 + v_3$$

- equació general o cartesiana

Considerem l'equació vectorial $x = p + u + v$, d'on tenim que:

$$x - p = u + v$$

igualtat que ens indica que el vector $x - p$ és combinació lineal de u i v , o, el que és el mateix, els vectors $x - p$, u i v són linealment dependents. Aplicant una propietat dels determinants tenim que:

$$D(x - p, u, v) = 0$$

Indiquem la igualtat anterior a partir del components dels tres vectors, calculant el determinant i igualant a zero s'obté l'expressió:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

que és l'**equació general o cartesiana del pla**.

Per a un mateix pla hi ha diferents expressions per indicar l'equació vectorial o les equacions paramètriques, tot depèn del punt i dels vectors orientadors escollits. En canvi, l'equació general d'un pla sempre és única.

- Equació canònica

Només existeix l'equació canònica d'un pla quant tots els coeficients de l'equació general són diferents de zero.

1.3. Vector associat a un pla

L'equació general d'un pla queda perfectament determinada per un vector n associat al pla i per un punt P que hi pertany, ja que el vector associat ens determina els coeficients A , B i C de l'equació i les coordenades del punt ens permeten trobar el valor del terme independent D .

Els components del vector associat coincideixen, respectivament, amb els coeficients de l'equació general del pla.

El vector associat a un pla és un dels vectors orientadors d'un pla perpendicular al pla donat.

1.4. Recta determinada per dos plans

Dos plans no paral·lels sempre determinen una recta.

Si dos plans són paral·lels, la direcció dels seus vectors associats serà la mateixa.

Per tant els vectors han de ser linealment dependents, els seus components han de ser proporcionals:

$$A / A' = B / B' = C / C'$$

Aquesta relació entre els coeficients de l'equació general dels dos plans ens indica quan els dos plans són paral·lels.

Però perquè dos plans determinin una recta, cal que siguin no paral·lels, per tant, que no hi hagi proporcionalitat entre els coeficients de l'equació general dels dos plans.

Si la relació és:

$$A / A' = B / B' = C / C' = D / D'$$

aleshores els plans són coincidents.