

APLICACIONES LINEALES

CONCEPTOS BÁSICOS:

DEFINICIÓN: Sean $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ Kev. Entonces se dice que una aplicación $f: U \rightarrow V$ es un HOMOMORFISMO ENTRE ESPACIOS VECTORIALES (o aplicación lineal) si se verifica que:

$$1) \forall u_1, u_2 \in U \quad f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$$

$$2) \forall u \in U, \lambda \in K \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

OBSERVACIÓN:

- Si $f: U \rightarrow V$ es una aplicación lineal, entonces: $f: (U, +) \rightarrow (V, +)$
- Por tanto $f(\vec{0}_u) = \vec{0}_v$
- De forma análoga a lo ya estudiado se introducen las nociones de mono, epi, endo, iso y
- Se definen también el núcleo y la imagen:

Sea $f: U \rightarrow V$
una aplicación lineal

$$\text{Ker}(f) = \{u \in U \mid f(u) = 0\} \subseteq U$$

$$\text{Im}(f) = f(U) = \{v \in V \mid \exists u \in U \quad f(u) = v\} \subseteq V$$

EJEMPLOS BÁSICOS:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y)$$

Si, pues se cumplen ambas condiciones

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y+1)$$

No, pues $f(\vec{0}_u) \neq \vec{0}_v$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x^2, y^2)$$

No, pues $f(u_1 + u_2) \neq f(u_1) + f(u_2)$

$$f: \mathbb{R}_3[t] \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$p(t) \mapsto \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p'(0) & p(0) \end{pmatrix}$$

Si, pues cumple ambas condiciones.

CONCEPTOS BÁSICOS:

PROPOSICIÓN: Sea $f : U \rightarrow V$
una aplicación lineal, entonces se verifica que:

1) $\text{Ker}(f)$ es un Sev de U

2) $\text{Im}(f)$ es un Sev de V

Demostración:

1) $\overset{r}{0}_U \in \text{Ker}(f) \quad \text{Ker}(f) \neq \emptyset \quad \text{Ker}(f) \text{ es Sev} \quad \begin{array}{l} a) \forall u_1, u_2 \in \text{Ker}(f) \quad u_1 + u_2 \in \text{Ker}(f) \\ b) \forall u \in \text{Ker}(f), \forall \lambda \in K \quad \lambda u \in \text{Ker}(f) \end{array}$

$$a) \begin{array}{l} f(u_1) = \overset{r}{0}_V \\ f(u_2) = \overset{r}{0}_V \end{array} \quad f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = \overset{r}{0}_V + \overset{r}{0}_V = \overset{r}{0}_V \in \text{Ker}(f)$$

$$b) f(u) = \overset{r}{0}_V \quad f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda \overset{r}{0}_V = \overset{r}{0}_V \in \text{Ker}(f)$$

2)

$\overset{r}{0}_V \in \text{Im}(f) \quad \text{Im}(f) \neq \emptyset \quad \text{Im}(f) \text{ es Sev} \quad \begin{array}{l} a) \forall v_1, v_2 \in \text{Im}(f) \quad v_1 + v_2 \in \text{Im}(f) \\ b) \forall v \in \text{Im}(f), \forall \lambda \in K \quad \lambda v \in \text{Im}(f) \end{array}$

$$a) \begin{array}{l} f(u_1) = v_1 \\ f(u_2) = v_2 \end{array} \quad v_1 + v_2 = f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2) = f(u_3) = v_3 \in \text{Im}(f)$$

$$b) v = f(u) \quad f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda v \in \text{Im}(f)$$

TEOREMA: Sean U y V Kev finito dimensionales, y $f : U \rightarrow V$
homomorfismo. Entonces:

1) f es monomorfismo ! $\text{Ker}(f) = \{ \overset{r}{0}_U \}$
! $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$

2) f es epimorfismo ! $\text{Im}(f) = V$! $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(V)$

3) La primer afirmación también es valida para espacios infinitos.

TEOREMA: Sea $f : U \rightarrow V$
una aplicación lineal. Entonces: $\dim(U) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$

Demostración:

Supongamos $\dim(U) = n$, y $\dim(\text{Ker}(f)) = r$ ($r \leq n$) La afirmación entonces equivale a: ¿ $\dim(\text{Im}(f)) = n - r$?

Sea $B_{\text{Ker}(f)} = \{u_1, \dots, u_r\}$ una base de $\text{Ker}(f)$. Por ser base de un subespacio de U , puedo añadir vectores hasta tener una base de U . Nos queda: $B = \{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$. Veamos que la imagen de $B_c = \{u_{r+1}, \dots, u_n\}$ es una base de $\text{Im}(f)$. Si lo es es, $\dim(\text{Im}(f)) = n - r$, que es lo que buscamos.

$B = \{f(u_{r+1}), \dots, f(u_n)\}$ Base

1) B es SG de $\text{Im}(f)$

2) B es li

1) ? $\forall v \in \text{Im}(f) \exists \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n \in K / v = \lambda_{r+1}f(u_{r+1}) + \dots + \lambda_n f(u_n)$?

$\exists u \in U / v = f(u)$

$\exists a_1, \dots, a_n \in U / u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$

$$v = f(u) = f(a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) = f(a_1 u_1) + \dots + f(a_n u_n) =$$

$$= a_1 f(u_1) + \dots + a_r f(u_r) + a_{r+1} f(u_{r+1}) + \dots + a_n f(u_n) = 0_V + a_{r+1} f(u_{r+1}) + \dots + a_n f(u_n)$$

2) ? $\lambda_{r+1} f(u_{r+1}) + \dots + \lambda_n f(u_n) = 0_V$ $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$?

$$f(\lambda_{r+1} u_{r+1} + \dots + \lambda_n u_n) = 0_V \quad \lambda_{r+1} u_{r+1} + \dots + \lambda_n u_n \in \text{Ker}(f) \quad \exists \mu_1, \dots, \mu_r \in K /$$

$$\lambda_{r+1} u_{r+1} + \dots + \lambda_n u_n = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_r u_r \quad \mu_1 u_1 + \dots + \mu_r u_r - \lambda_{r+1} u_{r+1} - \dots - \lambda_n u_n = 0_U$$

Dichos vectores son linealmente independientes, luego:

$$\mu_1 = \dots = \mu_r = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$$

COROLARIOS:

1) Si $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de U, entonces $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ es un SG de la imagen.

2) Sean U y V K-espacios vectoriales de dimensión finita, y sea $f: U \rightarrow V$ una aplicación lineal. Entonces:

f es isomorfismo ! f es epimorfismo ! f es monomorfismo.

3) Sean U y V K-espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces U es isomorfo a V ! $\dim(U) = \dim(V)$

Demostración:

2) Solo hace falta demostrar la segunda, pues la primera es inmediata a partir de aquella.

f es epimorfismo ! $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(V)$

f es monomorfismo ! $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$

Como $\dim(U) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(V)$! $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$

3)

☐ Si U y V son isomorfos $\exists f: U \rightarrow V$ Isomorfismo $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$ $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(V)$ $\dim(U) = \dim(V)$



Sea $B = \{u_1, \dots, u_n\}$

y $C = \{v_1, \dots, v_n\}$

bases de U y V respectivamente. Consideremos la aplicación:

$$f: U \rightarrow V$$

$$x_1 u_1 + \dots + x_n u_n \mapsto x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

Dicha aplicación es un isomorfismo, pues $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$.
 . Luego U y V son isomorfos.

REPRESENTACIÓN MATRICIAL: Para representar un homomorfismo necesitaremos dos bases (llegada y salida). Lo representaremos por medio de una matriz:

Sea $f: U \rightarrow V$
 un homomorfismo

$$\dim(U) = n$$

$$\dim(V) = m$$

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$ Base de U

$B' = \{v_1, \dots, v_m\}$ Base de V

¿Cómo puedo saber las coordenadas de $f(u)$ en B' , sabiendo las de u en B ?

Sean $x_1, \dots, x_n$ las coordenadas de u en B

Sean $y_1, \dots, y_m$ las coordenadas de $f(u)$ en B'

$$u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n \quad f(u) = x_1 f(u_1) + \dots + x_n f(u_n) = y_1 v_1 + \dots + y_m v_m$$

$f(u_1)$ en B' ! Sean $a_{11}, \dots, a_{m1}$ las coordenadas de $f(u_1)$ en B'

$$M \quad M$$

$f(u_n)$ en B' ! Sean $a_{n1}, \dots, a_{nm}$ las coordenadas de $f(u_n)$ en B'

$$f(u_1) = a_{11}v_1 + \dots + a_{m1}v_m$$

$$M \quad M$$

$$f(u_n) = a_{n1}v_1 + \dots + a_{nm}v_m$$

$$y_1 v_1 + \dots + y_m v_m = x_1 f(u_1) + \dots + x_n f(u_n) = x_1 (a_{11}v_1 + \dots + a_{m1}v_m) + \dots + x_n (a_{n1}v_1 + \dots + a_{nm}v_m) =$$

$$= (a_{11}x_1 + \dots + a_{n1}x_n)v_1 + \dots + (a_{1m}x_1 + \dots + a_{nm}x_n)v_m$$

$$[y_1 - (a_{11}x_1 + \dots + a_{n1}x_n)]v_1 + \dots + [y_m - (a_{1m}x_1 + \dots + a_{nm}x_n)]v_m = \mathbf{0}_V$$

Por ser B' una base sus vectores son linealmente independientes:

$$y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{n1}x_n$$

$$\vdots$$

$$y_m = a_{1m}x_1 + \dots + a_{nm}x_n$$

Ecuaciones del Homomorfismo f respecto a las bases B y B'

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matriz del Homomorfismo f respecto a las bases B y B'

Dicha matriz se representa por $Y=M(f,B,B')X$

OBSERVACIÓN:

$$M(f, B, B') = \begin{pmatrix} \boxed{} & \dots & \boxed{} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{} & \dots & \boxed{} \end{pmatrix}$$

Coordenadas de $f(u_1)$ en B' ↑
Coordenadas de $f(u_n)$ en B' ↑

1)Se calcula de usando las coordenadas en B' de la imagen de los vectores de B.

2)Se usa multiplicándola por la matriz columna de las coordenadas del vector en B

$$\boxed{f(u)} = M(f, B, B') \boxed{u}$$

3)Si $f : U \rightarrow U$

(es un endomorfismo) simplificamos, y usamos la misma base a la salida y a la llegada. Se representa por $M(f,B)$

4)Las ecuaciones implícitas del $\text{Ker}(f)$ están incluidas en la colección de ecuaciones dada por $Y=M(f,B,B')X$

Ejemplo:

$$f : R^3 \rightarrow R^3 \quad M_{3 \times 3}(R)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & x+y \\ x+z & z \end{pmatrix}$$

1)Veamos que es un homomorfismo:

$$u = (x, y, x) \in R^3, v = (x, y, x) \in R^3$$

$$f(u+v) = \begin{pmatrix} x+x \\ x+x+z+z \\ z+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x+y \\ x+z \\ z \end{pmatrix} = f(u) + f(v)$$

$$u = (x, y, x) \in R^3, \lambda \in R$$

$$f(\lambda u) = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda(x+z) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ x+z \end{pmatrix} = \lambda f(u)$$

2) Calculemos la matriz de f respecto a las bases canónicas:

$$B_C^{R^3} = \left\{ \underset{u_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{u_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}, \quad B_C^{M_{2 \times 2}(R)} = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}, \underset{v_4}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$u_1 \quad f(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 + v_2 + v_3 \quad u_2 \quad f(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2$$

$$u_3 \quad f(u_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_3 + v_4$$

$$M(f, B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

3) Calculemos la matriz de f respecto a las bases dadas:

$$B^{R^3} = \left\{ (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1) \right\}, \quad B^{M_{2 \times 2}(R)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$u_1 = (1,0,0) \text{ a } f(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_3 \quad u_3 = (1,1,1) \text{ a } f(u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = v_3 + v_4 - v_1$$

$$u_2 = (1,1,0) \text{ a } f(u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = v_3 + v_2 - v_1$$

$$M(f, B^{R^3}, B^{M_{2 \times 2}(R)}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

4) Sea $u=(3,2,1)$ Calcular $f(u)$ utilizando 2) y 3)

$$\begin{aligned}
 A) \text{coef}(f(u)_A) &= A \text{coef}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} & f(u)_A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\
 B) \text{coef}(f(u)_B) &= B \text{coef}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} & f(u)_B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

APLICACIÓN(Cambio de base): Supongamos que U es un Kev finito dimensional. Por ello existen bases. Sea $B=\{u_1, \dots, u_n\}$ y $B'=\{v_1, \dots, v_n\}$ bases de U . Sean $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n)$ las coordenadas de un vector u en B y B' respectivamente. ¿Cómo puedo hallar Y a partir de X ?

Tomamos el homomorfismo identidad

$$\begin{array}{ccc}
 id : U & \longrightarrow & U \\
 u & \longmapsto & id(u) = u
 \end{array} \quad A = M(f, B, B')$$

Se verifica que :

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

A 'A' se le llama Matriz del cambio de Base de B a B' . Se representa $A=M(B, B')$

OBSERVACIÓN:

1)La matriz A se determina de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \mu_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ \vdots \\ L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 + L + \lambda_n v_n \\ \vdots \\ \mu_1 v_1 + L + \mu_n v_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} M & O & M \end{pmatrix}, \quad M
 \end{aligned}$$

2)Se utiliza multiplicándola por la derecha por el vector columna de los coeficientes de u en la base B .

3) A es cuadrada e invertible

$$\bullet M(B', B) = M(B, B')^{-1}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
 f : R^3 & \longrightarrow R^3 \\
 (x, y, z) & \longmapsto f(x e_1, y e_2, z e_3) = ((y+z) e_1, (x+z) e_2, (y-x) e_3)
 \end{aligned}$$

1)La matriz A es:

$$f(e_1) = e_2 - e_3 \quad f(e_2) = e_1 + e_3 \quad f(e_3) = e_1 + e_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

PROPOSICIÓN: Supongamos que U es un Kev finito dimensional. Sea $BU = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base de U . Entonces $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ es un SG de $f(U)$

Demostración:

$$u \in U \quad u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \quad f(u) = \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_n f(u_n)$$

APLICACIÓN(Cambio de base en un hom.): Sea $f : U \rightarrow V$

un homomorfismo, y sean B_1 y B_2 base de U , y B_1' y B_2' bases de V . Tomemos las representaciones matriciales del homomorfismo dadas por B_1 , B_1' y por B_2 y B_2' . Vamos a intentar hallar alguna relación entre una matriz y la otra:

Tomamos un vector $u \in U$.

Si trabajamos con $A_1 = M(f, B_1, B_1')$

. Sean X las coordenadas de u en B_1 , e Y las coordenadas de $f(u)$ en B_1' $Y = A_1 X$

Si trabajamos con $A_2 = M(f, B_2, B_2')$

. Sean $\tilde{X}$

las coordenadas de u en B_2 , e $\tilde{Y}$

las coordenadas de $f(u)$ en B_2' $\tilde{Y} = A_2 \tilde{X}$

Vamos a relacionar $X, \tilde{X}$

, Y e $\tilde{Y}$

.

Sea $P = M(B_1, B_2) / PX = \tilde{X}$

Sea $Q = M(B_1', B_2') / QY = \tilde{Y}$

$$QY = QA_1 X = \tilde{Y} = A_2 \tilde{X} = A_2 PX$$

$$QA_1 X = A_2 PX$$

Como Q es invertible por ser una matriz cambio de base

$$A_1 X = [Q^{-1} A_2 P] X \quad A_1 = Q^{-1} A_2 P$$

La matriz X se puede cancelar porque al ser una matriz vector de variables también es válida para $x = (1, 0, \dots, 0)$, $x = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $x = (0, \dots, 0, 1)$, con lo que las matrices son iguales columna a columna.

La expresión general del cambio es :

$$M(f, B_1, B_1) = M(B_2, B_1)M(f, B_2, B_2)M(B_1, B_2)$$

OBSERVACIÓN: Si $f : U \rightarrow U$

es un endomorfismo, y B_1 y B_2 base de U $A_1 = M(f, B_1)$

$$A_2 = M(f, B_2)$$

$$M(f, B_1) = M(B_2, B_1)M(f, B_2)M(B_1, B_2)$$

o bien

$$M(f, B_1) = M(B_1, B_2)^{-1}M(f, B_2)M(B_1, B_2)$$

DEFINICIÓN: Dos matrices A y B $M_{n \times n}(K)$ son semejantes si existe una matriz P $M_{n \times n}(K)$ tal que $\det(P) \neq 0$ y $A = P^{-1}BP$.

TEOREMA: Todas las representaciones matriciales de un mismo endomorfismo son semejantes. Véase formula anterior

Ejemplo:

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^2 \\ (1,0,1) & \mapsto & (0,1) \\ (0,0,-1) & \mapsto & (1,1) \\ (2,1,1) & \mapsto & (1,0) \end{array}$$

1) Hallar la representación matricial de f en las bases canónicas.

$$f(1,0,0) = f(1,0,1) + f(0,0,-1) = (1,2)$$

$$f(0,1,0) = f(2,1,1) - 2f(1,0,1) - f(0,0,-1) = (0,-3)$$

$$f(0,0,1) = -f(0,0,-1) = (-1,-1)$$

$$A = M(f, B_C^{\mathbb{R}^3}, B_C^{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz está formada por la imagen de los vectores de la base fuente.

2) Calcular la representación matricial de f en las bases $B = \{(1,0,1), (0,0,-1), (2,1,1)\}$

de $\mathbb{R}^3$

y $B = \{(0,1), (1,0)\}$

de $\mathbb{R}^2$

Hallamos la matriz que nos lleva de B

$$B_C^{\mathbb{R}^3}$$

. La multiplicamos por la matriz del homomorfismo en las bases canónicas, y después por la que nos lleva de

$$B_C^{\mathbb{R}^2}$$

a B

$$M(B, B_C^{R^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Todo cambio de base que muere en la canónica son los propios vectores de la base inicial.

$$M(f, B_C^{R^3}, B_C^{R^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Ya la hemos caculado

$$M(B_C^{R^2}, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La única diferencia entre $B_C^{R^2}$

y B

es que el orden de sus vectores es el contrario.

$$B = M(f, B, B) = M(B_C^{R^2}, B) M(f, B_C^{R^3}, B_C^{R^2}) M(B, B_C^{R^3})$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Ecuaciones y dimensiones del $\text{Ker}(f)$ y de $\text{Im}(f)$:

Trabajando con la representación matricial B

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{pmatrix} \quad \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 2 = 1$$

$$\dim(\text{Im}(f)) = \dim(R^3) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2 = \dim(R^2)$$

OBSERVACIÓN: Si $f: U \rightarrow U$

es un endomorfismo, y U es un Kev finito dimensional, entonces f es un automorfismo si y solo si

$$A = M(f, B)$$

$$\det(A) \neq 0$$

Demostración: Sea $B = \{u_1, \dots, u_n\}$

una base de U

$$\boxed{f}$$

automorfismo

$$\text{Im}(f) = U$$

B se transforma en una base de U

Los transformados de B son linealmente independientes

$$\det(A) \neq 0$$

$$\begin{array}{l} \boxed{\det(A) \neq 0} \\ \text{es base de } \text{Im}(f) \end{array} \quad B' = \{f(u_1), \dots, f(u_n)\} \text{ l.i.} \quad B' \\ \dim(\text{Im}(f)) = n$$

$$\begin{array}{l} \text{Im}(f) = U \\ \text{es automorfismo} \end{array} \quad \text{Ker}(f) = \{0_U\} \quad f$$

DEFINICIÓN: Sean U y V dos Kev, entonces se consideran los conjuntos:

$$\begin{aligned} L(U, V) &= \{f : U \rightarrow V / f \text{ es aplicacion lineal}\} = \text{Hom}(U, V) \\ \text{End} &= \{f : U \rightarrow U / f \text{ es aplicacion lineal}\} \end{aligned}$$

Además se consideran tambien las operaciones

$$+ : L(U, V) \times L(U, V) \rightarrow L(U, V)$$

$$\begin{array}{l} (f, g) \mapsto (f + g) : U \rightarrow V \\ u \mapsto (f + g)u = f(u) + g(u) \end{array}$$

$$: K \times L(U, V) \rightarrow L(U, V)$$

$$\begin{array}{l} (\lambda, f) \mapsto \lambda f : U \rightarrow V \\ u \mapsto (\lambda f)u = \lambda f(u) \end{array}$$

Es facil de demostrar que ambas son aplicaciones lineales.

Entonces se verifica que $(L(U, V), +, \cdot)$ y $(\text{End}(U), +, \cdot)$ son Kev.

TEOREMA: Si $\dim(U) = n$ y $\dim(V) = m$, entonces $L(U, V)$ es isomorfo a $M_{mn}(K)$

Demostración:

Fijadas dos bases B y B' de U y V respectivamente, el isomorfismo es:

$$\begin{array}{l} \varphi : L(U, V) \rightarrow M_{mn}(K) \\ f \mapsto M(f, B, B') \end{array}$$

COROLARIO:

1) Si $\dim(U) = n$ entonces $\text{End}(U)$ es isomorfo a $M_{nn}(K)$

$$2) \dim(L(U, V)) = \dim(U) \dim(V)$$

$$3) \dim(\text{End}(U)) = \dim(U)^2$$

IDEA INTUITIVA: Vamos a crear un diccionario entre homomorfismos y matrices, y entre endomorfismos y matrices

$L(U, V)$	$\longleftrightarrow$	$M_{mn}(K)$
f	a	$M(f, B, B) = A$
g	a	$M(g, B, B) = B$
$f + g$	a	$A + B$
$\lambda f + \mu g$	a	$\lambda A + \mu B$
Nulo	a	0
$\text{End}(U)$	$\longleftrightarrow$	$M_{nn}(K)$
f	a	$M(f, B) = A$
g	a	$M(g, B) = B$
$f + g$	a	$A + B$
$\lambda f + \mu g$	a	$\lambda A + \mu B$
$\text{id}(u)$	a	$M(\text{id}(u), B) = I$

Ahora la pregunta es : ¿Quién es AB? ¿y A²?

$$AB? \quad A(BX) = f(g(x))$$

$$f \circ g : U \xrightarrow{g} U \xrightarrow{f} U \quad \text{a} \quad M(f \circ g, B) = AB$$

$$f^2 = f \circ f : U \xrightarrow{f} U \xrightarrow{f} U \quad \text{a} \quad M(f \circ f, B) = A^2$$

Y si $\det(A) \neq 0$
entonces $\exists A^{-1}$

$$f^{-1} : U \rightarrow U \quad \text{a} \quad M(f^{-1}, B) = A^{-1}$$

OBSERVACIÓN: De forma análoga a como se hizo en grupos y anillos se introduce el concepto de Kev cociente, el teorema de Isomorfía y la descomposición canónica de un homomorfismo.

$$M(f, B, B') = \begin{pmatrix} \boxed{} & \cdots & \boxed{} \\ & \ddots & \\ & & \boxed{} \end{pmatrix}$$

↑
 Coordenadas de $f(u_1)$ en B'
 Coordenadas de $f(u_n)$ en B' —