

PRÁCTICA 2: ESTUDIO DE UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN (CABLE COAXIAL) EN RÉGIMEN ESTACIONARIO.

1.- Objetivos.

En esta práctica vamos a estudiar el comportamiento en régimen sinusoidal estacionario de una línea de transmisión. Los efectos asociados al carácter distribuido del sistema se ponen de manifiesto trabajando a frecuencias relativamente bajas (menores de 2 MHz) con respecto a la longitud del cable utilizado. Retardo de la señal, longitud de onda, adaptación y traslación de impedancias a lo largo de la línea serán observados en el desarrollo de la práctica. Además, vamos a determinar el factor de atenuación a una determinada frecuencia y se va a comparar el comportamiento de la línea real con la de sus modelos de parámetros localizados y distribuidos, observándose que el modelo simplificado de parámetros localizados será válido sólo en el rango de frecuencias donde la línea es eléctricamente corta (más adelante se describirá este concepto).

2.- Instrumental.

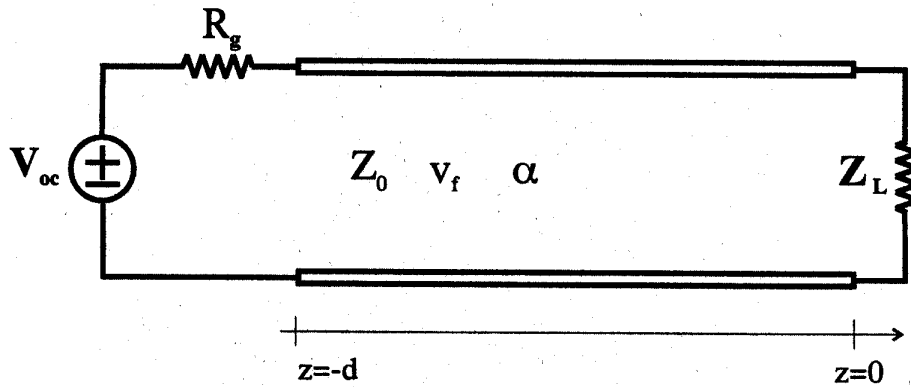
Para realizar la práctica hemos dispuesto de:

- Cable coaxial de 100 metros. Habitualmente utilizado en los aparatos de televisión que hará de línea de transmisión para nosotros. Evidentemente, no va a ser una línea de transmisión ideal, hay pérdidas a lo largo de la línea, detalle a tener en cuenta en la obtención de resultados.
- Generador de frecuencia variable. Nos proporcionará la señal de voltaje y frecuencia adecuada para la realización de la práctica y para que podamos observar de manera eficaz los resultados que aparecen en la línea.
- Juego de resistencias. Estas resistencias conectadas a la salida del generador nos permitirán probar distintas situaciones que se producen en la línea de transmisión.
- Regleta. Fundamental para establecer las conexiones.
- Polímetro o resistencia variable. Es necesario para conseguir que la línea esté adaptada, más tarde se explicará qué significa esto.
- Osciloscopio. Utilizaremos un osciloscopio ya que este es siempre necesario en toda práctica de electromagnetismo.
- Multímetro. Nos será de gran utilidad para medir el valor de las resistencias desconocidas por nosotros.

Podemos observar que los elementos que necesitamos son los mismos que los que hacían falta en la primera práctica. La diferencia estriba en que ahora vamos a realizar un estudio en el dominio de frecuencias.

3.- Estudio teórico.

Sea la línea de transmisión representada en la figura 1:



Circuito elemental con la línea de transmisión a estudio. Tenemos una impedancia de carga Z_L conectada a un generador de tensión alterna sinusoidal de frecuencia f , amplitud V_{oc} (las iniciales oc significan *open circuit*-, circuito abierto) y una resistencia R_g , mediante una sección de longitud d de una línea de transmisión de impedancia característica Z_0 , factor de atenuación α y velocidad de fase v_f .

Suponemos pérdidas leves, esto es, α tiene un valor bajo y constante de fase $\beta = \omega / v_f$. En un extremo de la línea tenemos conectado un generador de resistencia interna R_g y en el otro una carga de impedancia Z_L . Si introducimos el parámetro $\Gamma = \Gamma_L e^{-2\alpha d}$, podemos decir que la tensión eléctrica en cualquier punto de la línea tiene el valor:

$$V(z) = \frac{Z_0}{R_g + Z_0} e^{-\gamma(d+z)} \frac{1 + \Gamma_L e^{2\gamma d}}{1 - \Gamma_L \Gamma_g e^{-2\gamma d}} V_{oc} \quad (1)$$

Γ_L y Γ_g son, respectivamente, los valores de los coeficientes de reflexión en los extremos de la carga y del generador, y sus valores son :

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad \text{y} \quad \Gamma_g = \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0}$$

de tal manera que

La expresión (1) será utilizada para tratar los aspectos teóricos de cada uno de los apartados de la práctica. A grosso modo, podemos ver que si en esta ecuación se ignoran las pérdidas y si consideramos la velocidad de fase como $v_f = \omega / \beta$ independiente de la frecuencia, es lo mismo desplazar el punto de medida a lo largo de la línea a variar la frecuencia de operación. Esto último es lo que vamos a hacer nosotros puesto que en nuestro montaje no podemos mover el punto de medida por el circuito. Tengamos en cuenta este dato a la hora de realizar y comentar los distintos apartados de la práctica.

4.- Realización experimental.

Debemos tener en cuenta que la medida de la frecuencia que ofrece el generador en sus controles, no es el valor exacto. Pudimos comprobar este hecho. Para conocer la frecuencia debemos usar el osciloscopio y los controladores adecuados del mismo. Hay que tener en cuenta además que la lectura que ofrece el osciloscopio se refiere a $1/T$, por lo que debemos multiplicar las medidas por 2 para obtener el valor de f . Pueden haber

casos en los que esto no sea necesario realizarlo porque los resultados no van a depender de este factor, pero hemos tomado la decisión de hacerlo siempre.

1. Para empezar, ponemos una amplitud V_{oc} de 5V en el generador. Esta amplitud no podrá ser modificada durante el desarrollo de toda la práctica. Para poder medir este voltaje se ha trabajado con el circuito abierto. Ya hemos dicho que las iniciales oc se refieren a *open circuit*, término inglés que significa circuito abierto.

Ahora montamos el circuito que aparece en la figura 1, conectando el generador directamente a la línea y colocando en su final una resistencia de 75 . ¿Cuál es nuestro objetivo con esto? Dado que el generador tiene una impedancia de salida R_g (en este caso de 50), es posible comprobar que cuando coinciden la resistencia de carga y la impedancia (por lo que $Z_o=75$), la amplitud de la tensión medida en el extremo $z=-d$ no depende de la frecuencia y tiene un valor de :

$$V(z = -d) = \frac{Z_o}{Z_o + R_g} V_{oc}$$

Es posible demostrar esto: puesto que $Z_L = Z_o = 75$, lógicamente $\Gamma = 0$ y

sustituyendo en la expresión $V(z)$: z por $-d$ y Γ por cero, obtenemos lo indicado anteriormente.

Según esta expresión, el voltaje que debería medirse a la entrada de la línea debe ser:

$$V(z = -d) = \frac{Z_o}{Z_o + R_g} V_{oc} = \frac{75}{75 + 50} 5 = 3 \text{ V}$$

Este es el resultado teórico a partir de la fórmula que hemos determinado para una línea tal que su resistencia de carga es igual a la impedancia de la misma)

Hemos medido el valor de la amplitud de la tensión en este apartado de la práctica para ver si coincide con el teórico y una vez realizadas las medidas pertinentes, el valor de la tensión vale:

$$V(z = -d) = (3.15 \pm 8.91 \times 10^{-3}) \text{ V}$$

Es posible observar que, en efecto, esta fórmula es independiente de la frecuencia sin más que ir variando la frecuencia desde, por ejemplo, 100 Hz hasta 1 MHz. Podemos observar en el osciloscopio que prácticamente no hay variación en el voltaje en $z = -d$. Hemos realizado un barrido completo en todo este rango de frecuencias y hemos podido observar la independencia que hay entre la frecuencia y el voltaje en este tipo de comportamiento. Todo esto lo hemos conseguido ver en el osciloscopio. Hay que destacar que aparecen variaciones de voltaje cuando se trabajan a frecuencias altas. Esto no quiere decir que la fórmula no es válida para frecuencias elevadas, tan sólo se debe a imperfecciones del generador y a la aparición de ruido en el laboratorio.

Por lo tanto, en este apartado hemos podido encontrar un diseño en el cual la amplitud del voltaje de entrada es independiente de la frecuencia gracias a que la resistencia de carga del generador tiene el mismo valor que la impedancia de la línea (75 ohmios). Hemos conseguido en la línea un comportamiento independiente de la frecuencia.

2.- Ahora vamos a realizar medidas en los dos extremos de la línea, colocando una sonda en cada uno de los extremos (entrada de la línea y carga adaptada). Si recordamos la expresión:

$$V(z) = \frac{Z_o}{R_g + Z_o} e^{-\gamma(d+z)} \frac{1 + \Gamma_L e^{2\gamma l}}{1 - \Gamma_L \Gamma_g e^{-2\gamma l}} V_{oc}$$

Al trabajar en los dos extremos de la carga, ($z = -d$ y $z = 0$), es posible adivinar que en el extremo de la carga se medirá una tensión igual a la que tenemos en el extremo del generador pero con una ligera atenuación que se conoce a partir del factor de atenuación e^{-d} y un desfase de ángulo $= d = (2d/vf)f$, donde f se refiere a la frecuencia. En este apartado vamos a medir las frecuencias para las cuales el desfase es de $\pi/2$ y π . Dado la longitud del cable es de 100 metros y que para que se produzca un desfase de $\pi/2$ (o π) esta longitud debe ser un cuarto (o media longitud de onda), se puede determinar la velocidad de fase en la línea puesto que:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi/T}{k} \quad \text{y} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{por tanto} \quad v_f = \frac{\lambda}{T}$$

Realizadas las medidas, obtenemos que:

Desfase de $\pi/2$ $1/T = 597$ kHz longitud de la onda $= 100 \times 4 = 400$ m

Desfase de π $1/T = 1.25$ MHz longitud de la onda $= 100 \times 2 = 200$ m

Ahora realizando los cálculos, podemos encontrar la velocidad de fase:

Para desfase de $\pi/2$ $vf = (2.4 \times 10^8 \pm 4 \times 10^6)$ m/s

Para desfase de π $vf = (2.5 \times 10^8 \pm 2 \times 10^6)$ m/s

Vemos que los errores son bastante elevados. Nos extraña que sea así, pero dado que los resultados son bastante elevados también, consideramos que no son influyentes en el resultado.

También vamos a calcular en este apartado el factor de atenuación sabiendo que es igual a la razón entre el voltaje de entrada y el de salida, podemos calcular el valor de α considerando distintas frecuencias (evidentemente, el valor del coeficiente va a ser el mismo siempre). Los resultados experimentales son los siguientes:

$1/T$ Voltaje entrada Voltaje salida α

1.25 MHz	3.000 V	2.790 V	$1.075 \pm 5.263 \times 10^{-4}$
840 kHz	3.080 V	2.850 V	$1.080 \pm 5.166 \times 10^{-4}$
200 kHz	3.150 V	2.985 V	$1.055 \pm 4.870 \times 10^{-4}$

Finalmente, si realizamos la media, podemos obtener un valor aproximado para el coeficiente de atenuación:

$$= 1.070 \pm 8.837 \times 10^{-4}$$

4.- En el apartado anterior hemos visto una expresión para el desfase $= d = (2d/vf)f$ en la que podemos observar como éste es una función lineal de la frecuencia. ¿qué queremos decir con esto? Queremos decir que el desfase temporal entre las señales medidas a la entrada y la salida de la línea son independientes de la frecuencia a la que estemos trabajando. Es decir, $t = d/vf$, donde d es la longitud de la línea. Podemos realizar medidas que confirmen esta afirmación, matando además dos pájaros de un tiro pues podremos obtener de forma distinta el valor de la velocidad de fase.

Para ello hemos tomado un rango de frecuencias entre 1/T 100 kHz y 1 MHz y hemos medido los desfases temporales en cada frecuencia los resultados son los siguientes (a partir de aplicar que $v_f = d/t$)

1/T t (s) v_f (m/s)

100 kHz	0.500	$2.00 \times 10^8 \pm 2.00 \times 10^7$
250 kHz	0.410	$2.43 \times 10^8 \pm 9.72 \times 10^6$
515 kHz	0.430	$2.32 \times 10^8 \pm 4.50 \times 10^6$
754 kHz	0.400	$2.50 \times 10^8 \pm 3.31 \times 10^6$
1 MHz	0.594	$1.68 \times 10^8 \pm 1.68 \times 10^6$

Como vemos en los resultados, para la frecuencia mayor aparece un resultados algo distinto. Esto se debe a que los efectos del ruido son mayores conforme subimos en la frecuencia. De todas formas es posible calcular la velocidad de fase y obtenemos que:

$$V_f = (2.19 \times 10^8 \pm 2.30 \times 10^7) \text{ m/s}$$

Este resultado difiere del anterior si se hace considerando la media de la velocidad de fase con los datos del apartado 3.3. imaginamos que se deberán a los efectos del ruido que se mete a frecuencias altas.

5.- Ahora hemos puesto la línea en cortocircuito realizando las modificaciones adecuadas en la regleta. Nuestro objetivo es medir la tensión a la entrada de la línea para distintas frecuencias para representar la tensión frente a las frecuencias. Queremos ver que, para frecuencias bajas en las cuales podemos decir que la longitud eléctrica del cable es corta (más adelante se explicará este concepto), los resultados se pueden modelar a partir de la consideración de que la línea terminada en corto funciona como la conexión en serie de una resistencia y una autoinducción.

Efectivamente, haciendo un análisis del circuito, obtenemos que:

Si tenemos el circuito

Donde $V(-d) = Z_o I$ y

$$I = \frac{R_L + R_g + j\omega L}{V_{oc}}$$

Realizando un análisis del circuito obtenemos que:

$$V(-d) = \frac{R_L + j\omega L}{R_L + R_g + j\omega L} V_{oc} = \frac{R_L V_{oc}}{R_L + R_g + j\omega L} + \frac{j\omega L * V_{oc}}{R_L + R_g + j\omega L}$$

En una primera aproximación, podemos considerar que $jL \ll Rg$, entonces:

$$V(-d) = \frac{R_L V_{oc}}{R_L + R_g} + \frac{j\omega L V_{oc}}{R_L + R_g}$$

Y para que se no se nos anule el segundo sumando hacemos en segunda aproximación: $jL \gg RL$ y obtenemos que:

$$V(-d) = \frac{R_L V_{oc}}{R_L + R_g} + \frac{j\omega L V_{oc}}{R_L + R_g}$$

, donde $\omega = 2\pi f$

$$\text{Por tanto } V(-d) = \frac{R_L V_{oc}}{R_L + R_g} + j \frac{2\pi L V_{oc}}{R_L + R_g} f$$

Esta es la expresión lineal que aparece como resultado para modelar el potencial en $z = -d$. A partir de modelar la línea en corto como una conexión de una resistencia y una autoinducción. Como podemos observar, es la ecuación de una recta de forma $Y = A + Bf$.

En este caso, el voltaje de la línea es bastante lineal con la frecuencia. Podemos calcular, a partir de los resultados, la resistencia y la autoinducción de la línea, ya que operando con los resultados:

$$a = \frac{R_L V_{oc}}{R_L + R_g} \quad R_L V_{oc} = R_L a + R_g a \quad R_L (V_{oc} - a) = R_g a \quad R_L = \frac{R_g a}{V_{oc} - a}$$

$$b = \frac{2\pi L}{R_L + R_g} V_{oc} \quad L = \frac{b(R_L + R_g)}{2\pi V_{oc}}$$

Tenemos que comentar que aquí no se han considerado complejos, esto es, en la ecuación de la recta aparece un número complejo. Nosotros hemos trabajado directamente con reales. Se debería elevar al cuadrado la expresión dada para

$V(-d)$ e igualar los pares reales e imaginarios. Ocurre que la pendiente es la misma, por lo que vamos a evitarnos el engorroso cálculo y a trabajar según hemos expuesto en las expresiones anteriores.

Una vez comentados los aspectos teóricos de este apartado, vamos a pasar a la resolución del mismo:

Los datos medidos ofrecen lo siguiente.

1/T (kHz) V (V)

2	0,289
4	0,301
6,02	0,317
8	0,341
10	0,378
12	0,405
14	0,434
16	0,461

18	0,504
20	0,548

Gráficamente, los resultados son:

Como podemos ver, la aproximación a una recta deja bastante que desear. Esto puede deberse a los defectos del generador o a otra serie de factores como el ruido del laboratorio o a una incorrecta toma de datos. Sin embargo, podemos realizar el análisis de la recta de regresión para conocer la autoinducción y la resistencia de la línea.

Los datos que encontramos son:

$$Y = A + B * X$$

Parámetro Valor Error

A 0,23846 0,00896

B 0,01448 7,21877E-4

R SD

0,99021 0,01311

Y a partir de éstos es posible conocer la resistencia y la autoinducción de la línea de la manera que ya se ha comentado anteriormente.

Nota: es importante recordar de nuevo que en realidad nosotros hemos medido números reales , no complejos como aparecen en realidad en la expresión inicial que modela el circuito en corto, por lo que deberíamos elevar al cuadrado cada miembro de la expresión de $V(-d)$ e igualar partes reales e imaginarias, pero sale la misma pendiente, por lo que nos ahorramos dicho cálculo.

Una vez aplicadas las expresiones:

$$b = \frac{2\pi L}{R_L + R_g} V_{oc} \quad L = \frac{b(R_L + R_g)}{2\pi V_{oc}}$$

$$a = \frac{R_L V_{oc}}{R_L + R_g} \quad R_L V_{oc} = R_L a + R_g a \quad R_L (V_{oc} - a) = R_g a \quad R_L = \frac{R_g a}{V_{oc} - a}$$

Obtenemos los valores de R_L y de L :

$$R_L = (2.50 \pm 7.07 \times 10^{-3})$$

$$L = (2.42 \times 10^{-2} \pm 3.06 \times 10^{-9}) \text{ H}$$

5.- El máximo de tensión en esta situación se observa ahora cuando la longitud del cable es $\frac{1}{4}$ del valor de la longitud de onda ya que el corto situado en el terminal de la carga se ve como un abierto desde la entrada. Por tanto, es posible deducir de nuevo otra expresión para determinar la velocidad de fase sin más que medir el valor de ese máximo de tensión y determinar la longitud de onda a la que pertenece:

Máximo de tensión = 4.98 V.

$$1 / T = 602 \text{ kHz}$$

$$\text{Longitud de onda} = 4 \times 100 = 400 \text{ m.}$$

$$V_f = \lambda k = \lambda / T = (2.408 \times 10^8 \pm 4 \times 10^6) \text{ m/s}$$

Como podemos observar, los resultados que estamos encontrando para la velocidad de fase no son iguales en cada una de las estimaciones, pero se acercan bastante si consideramos el error de la medida. Obviamente, las aproximaciones realizadas, los fallos humanos y las imperfecciones del material de laboratorio llevan también a una disparidad en los resultados.

Si ahora aumentamos la tensión para determinar el mínimo, podemos encontrar de nuevo un resultado para la velocidad de fase ya que, a esa frecuencia, el valor de la longitud del cable es de $\frac{1}{2}$ la longitud de onda. En este caso:

Mínimo de tensión = 0.560 V.

$$1 / T = 1.21 \text{ MHz}$$

$$\text{Longitud de onda} = 2 \times 100 = 200 \text{ m.}$$

$$V_f = \lambda k = \lambda / T = (2.42 \times 10^8 \pm 2 \times 10^6) \text{ m/s}$$

En teoría, considerando una línea sin pérdidas, deberíamos obtener el mínimo en $V = 0$, pero al trabajar en una línea no ideal, aparece el mínimo para un valor distinto de cero. A partir de este valor, es posible determinar el factor de atenuación a la frecuencia en la que la longitud de onda es el doble de la longitud de la línea. En este caso, es posible demostrar que :

$$\alpha = \frac{(R_g / Z_o)}{[(V_{oc} / V(-d)) - 1]d}$$

Efectivamente, porque considerando que, al trabajar en corto, $L = -1$:

$$V(-d) = \frac{Z_o}{R_g + Z_o} \frac{1 - e^{-2\gamma d}}{1 + \frac{R_g - Z_o}{R_g + Z_o} e^{-2\gamma d}} V_{oc} = \frac{Z_o}{R_g + Z_o} \frac{[1 - e^{-2\gamma d}]}{1 + \frac{R_g - Z_o}{R_g + Z_o} e^{-2\gamma d}} V_{oc} =$$

$$= \frac{Z_o}{R_g + Z_o} \frac{[1 - e^{-2\gamma d}]}{\frac{R_g + Z_o (R_g - Z_o) e^{-2\gamma d}}{R_g + Z_o}} V_{oc}$$

$$\frac{V(-d)}{V_{oc} Z_o} = \frac{1 - e^{-2\gamma d}}{R_g [1 + e^{-2\gamma d}] + Z_o (1 - e^{-2\gamma d})}$$

$$\frac{V_{oc}}{V(-d)} Z_o = \frac{R_g (1 + e^{-2\gamma d}) + Z_o (1 - e^{-2\gamma d})}{1 - e^{-2\gamma d}} = \frac{R_g (1 + e^{-2\gamma d})}{1 - e^{-2\gamma d}} + Z_o$$

$$\frac{V_{oc}}{V(-d)} = 1 + \frac{R_g / Z_o (1 + e^{-2\gamma d})}{1 - e^{-2\gamma d}}$$

$$\frac{V_{oc}}{V(-d)} - 1 = R_g / Z_o \frac{1 + e^{-2\gamma d}}{1 - e^{-2\gamma d}}$$

Sabemos que : $\gamma = \alpha + j\beta = \alpha + j$ en nuestro caso.

$$\gamma = \alpha + j\beta = \frac{2\pi / T}{\lambda / T} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

como $d = \lambda / 2 \Rightarrow \gamma d = \pi$

Por este motivo:

$$e^{-2\gamma d} = e^{-2d(\alpha + j\beta)} = e^{-2\alpha d} e^{-2dj\beta}$$

$$e^{-2dj\beta} = e^{-2j\pi} = \cos(2\pi) - j \sin(2\pi) = 1 \quad e^{-2\alpha d} = e^{-2\alpha d}$$

Finalmente, nuestra expresión queda:

$$\frac{V_{oc}}{V(-d)} - 1 = R_g / Z_o \frac{[1 + e^{-2\alpha d}]}{[1 - e^{-2\alpha d}]}$$

si desarrollamos en serie la exponencial (aproximando $d \gg 1$) :

$$\frac{1 + e^{-2\alpha d}}{1 - e^{-2\alpha d}} = \frac{2(1 - \alpha d)}{2\alpha d} \approx \frac{1}{\alpha d} \gg 1$$

porque $d \ll 1$

Con todo esto:

$$\frac{V_{oc}}{V(-d)} - 1 = \frac{R_g}{Z_o} \frac{1}{\alpha d} \quad \alpha = \frac{R_g / Z_o}{[(V_{oc} / V(-d)) - 1]d}$$

Nota: En el boletín de prácticas se ha detectado un posible error al ir dividida la expresión por dos. Pero a la vista de los cálculos, es de suponer que ha sido una errata del mismo porque creemos que todo está bien por nuestra parte. Es de suponer que la fórmula del boletín de prácticas tenga un error y sobre el dos del denominador.

Por tanto, es posible calcular el factor de atenuación:

$$R_g = 50 \text{ }.$$

$$Z_o = 75 \text{ }.$$

$$V_{oc} = 5 \text{ V.} = 8.56 \times 10^{-3} \pm 7.52 \times 10^{-6}$$

$$V(-d) = 0.569 \text{ V.}$$

$$d = 100 \text{ m}$$

En la práctica anterior se encontraba un valor de la atenuación (= 8.7857×10^{-4}). Salvo por el error que en un caso es más preciso que en otro, podemos decir que ambos resultados coinciden bastante bien. La "modelación" del circuito en este caso para determinar el valor de la atenuación se acerca bastante a los resultados que teníamos en la otra práctica.

6.- Ahora se deja el extremo de la carga en abierto. Entre el generador y la entrada de la línea se coloca una resistencia de 10 k . Debemos realizar medidas de la tensión eléctrica para distintas frecuencias con el objetivo de representar gráficamente la tensión en la entrada de la línea frente a la frecuencia. Trabajando a frecuencias bajas para las cuales el cable es eléctricamente corto, podemos modelar el sistema como un condensador cuya capacidad es igual a la total de la línea.

Efectivamente, analizando el circuito, obtenemos :

$$V(-d) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} V_{oc} = \frac{V_{oc}}{j\omega CR + 1}$$

Aproximando a partir de considerar $jC \gg 1 \gg RC$ (aproximación plenamente justificada puesto que para ello hemos tomado una resistencia elevada de 10 kiloohmios)

$$V(-d) = \frac{V_{oc}}{j\omega CR} = \frac{V_{oc}}{j2\pi RC} \frac{1}{f}$$

$$\text{ya que } \omega = 2\pi f = 2/T = 2f$$

por lo tanto, obtenemos una relación lineal con f^{-1}

Conviene definir ahora el concepto de longitud eléctrica: dado que nosotros medimos la respuesta de la línea en un punto determinado, esto es, en $z = -d$ y no podemos realizar un barrido en z , tenemos que idear un

modelo que nos permita realizar este barrido y para ello usamos la longitud eléctrica. Simulamos un barrido en z a partir de una variación en la frecuencia debido a la relación entre longitud de onda y frecuencia. En lugar de fijar una frecuencia y longitud de onda y variar la distancia de la carga, fijamos la distancia a la carga y vamos variando la frecuencia de forma que la longitud eléctrica del tramo de línea existente entre la carga y el punto de medida vaya variando quedando definido el parámetro de longitud eléctrica como $\Gamma = d = d/vf$

Por tanto, variar la frecuencia es un análogo a variar la distancia a la carga.

Trabajando en un rango de frecuencias bajo y sabiendo que tenemos una resistencia de 10 k , encontramos lo siguiente:

T(10–6 s) V (V)

0,100	1,520
0,066	0,988
0,050	0,736
0,048	0,652
0,033	0,499

Obtenemos la siguiente gráfica:

Podemos ver que es una aproximación bastante buena a una recta, por lo que podemos encontrar aquí la capacidad del condensador que se modela.

Efectivamente, si consideramos que:

$$V(-d) = \frac{V_{oc}}{j\omega CR} = \frac{V_{oc}}{j2\pi RC} \frac{1}{f}$$

$$V(-d) = bT$$

$$\text{Donde } b = \frac{V_{oc}}{2\pi RC} \quad C = \frac{V_{oc}}{2\pi Rb}$$

$$Y R = R + R_g = 10 \text{ k} + 50 = 1050$$

La aproximación a una recta arroja los siguiente resultados:

$$Y = A + B * X$$

Parámetro Valor Error

$$A -0,0025 \quad 0,02498$$

$$B 15,12324 \quad 0,39721$$

R SD

• 0,99897 0,02098

Observemos que $A = -0.0025$. podemos aproximar a una recta que corta en el origen porque esto es la que nos dice la expresión que enfrenta a $v(-d)$ con $f-1$.

Por tanto, el valor obtenido para la capacidad es:

$$C = \frac{5}{2\pi(1050)b} = 5.01 \times 10^{-5} \pm 1.41 \times 10^{-7} \text{ F}$$

$$C = 5.01 \times 10^{-5} \pm 1.41 \times 10^{-7} \text{ F}$$

Debemos hacer constar que, mientras que en el modelo RC , la tensión cae monótonamente con la frecuencia como $1/f$, nuestra línea de transmisión tendrá una respuesta tal que tras pasar por el mínimo correspondiente a la frecuencia en la que la línea tiene una longitud de onda $\lambda/4$, la tensión vuelve a crecer hasta que se repite un máximo correspondiente a la frecuencia que tiene asociada una longitud de onda de $\lambda/2$.

Hemos podido observar este fenómeno en el laboratorio, pero un error a la hora de la obtención de los datos nos ha privado de exponer aquí los resultados.

7.-Como último apartado y para finalizar esta práctica, cargaremos la línea con una resistencia de **150** y añadiremos a la salida del generador una resistencia adecuada para adaptar la línea y obtener de esta forma una respuesta estacionaria (dado que $Z_0 = 75$, a la salida del generador se añade una resistencia de **25** para adaptar a la línea). Para una frecuencia dada, la tensión varía a lo largo de la línea. Ya hemos explicado en el punto anterior que trabajamos en un punto fijo por lo que usamos la longitud eléctrica. Vamos a simular de esta forma un barrido en la z a partir de variar la frecuencia y veremos como se cumple la variación de la tensión con z .

1/T (kHz) V (V)

495	1,87
600	0,41 (mín)
700	1,81
800	2,8
1010	4,26
1270	4,76 (máx)
1450	4,44

Gráficamente, podemos observar perfectamente la aparición del máximo y el mínimo:

A partir de estos valores podemos determinar el **SWR**, siglas anglosajonas del *standing wave ratio*, o lo que es lo mismo, cociente de las amplitudes máxima y mínima de la onda estacionaria. En nuestro caso:

$$SWR = 4.76/0.410 = 11.609 \pm 2.842 \times 10^{-2}$$

También podemos calcular L ya que:

$$\Gamma_L = \frac{R_L - Z_o}{R_L + Z_o}$$

$$= 0.33$$

De manera teórica obtenemos este resultado. A partir de los datos que ofrece la gráfica, podemos obtener el valor de L , ya que:

$$SWR = 1 + \rho_L \rho / 1 - \rho_L \rho$$

De donde se obtiene:

$$\rho_L \rho = SWR - 1 / SWR + 1$$

Por tanto:

$$\rho_L \rho = 0.841 \pm 2.06 \times 10^{-3}$$

Con todos los valores calculados, podemos ver como no coinciden con los que se obtienen teóricamente. La razón está en que hay pérdidas en la línea y los resultados no se corresponden a los de la línea ideal. Es más, cualquier carga vista a través de una longitud suficiente de línea de transmisión con pérdidas parece estar adaptada.

Con este apartado damos por concluida la práctica, en la cual nos hemos dedicado a sacar todo el jugo posible a partir del estudio de una línea de transmisión en el dominio de las frecuencias.

$$V(z) = \frac{Z_o}{R_g + Z_o} e^{-\gamma(d+z)} \frac{1 + \Gamma_L e^{2\gamma z}}{1 - \Gamma_L \Gamma_g e^{-2\gamma d}} V_{oc} \quad (1)$$

Γ_L y Γ_g son, respectivamente, los valores de los coeficientes de reflexión en los extremos de la carga y del generador, y sus valores son :

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} \quad \text{y} \quad \Gamma_g = \frac{R_g - Z_o}{R_g + Z_o}$$

$$V(z) = \frac{Z_o}{R_g + Z_o} e^{-\gamma(d+z)} \frac{1 + \Gamma_L e^{2\gamma z}}{1 - \Gamma_L \Gamma_g e^{-2\gamma d}} V_{oc}$$

$$a = \frac{R_L V_{oc}}{R_L + R_g} \quad R_L V_{oc} = R_L a + R_g a \quad R_L (V_{oc} - a) = R_g a \quad R_L = \frac{R_g a}{V_{oc} - a}$$

$$b = \frac{2\pi L}{R_L + R_g} V_{oc} \quad L = \frac{b(R_L + R_g)}{2\pi V_{oc}}$$

$$V(-d) = \frac{V_{oc}}{j\omega CR} = \frac{V_{oc}}{j2\pi RC} \frac{1}{f}$$